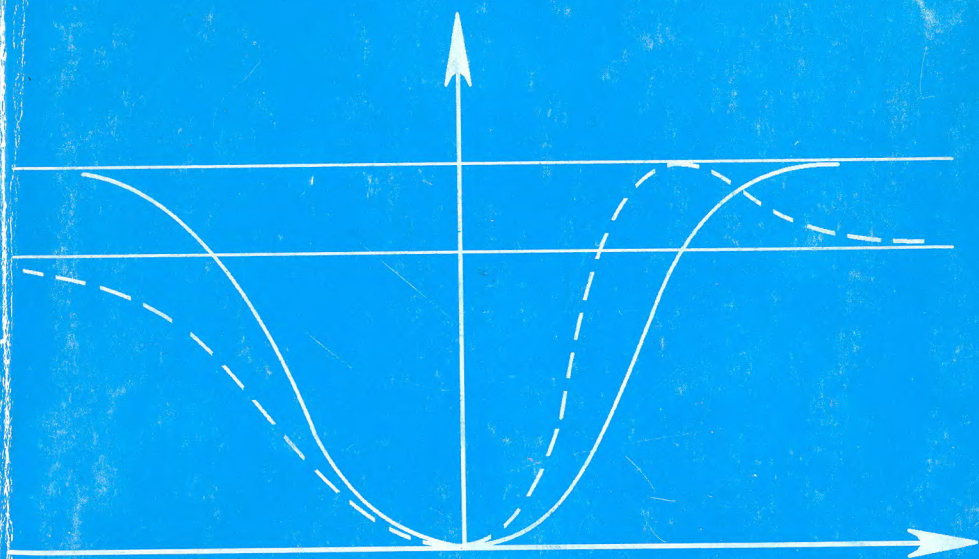


А. С. Кингсеп

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ФИЗИКУ ПЛАЗМЫ



А. С. Кингсеп

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ФИЗИКУ ПЛАЗМЫ



Москва
Издательство МФТИ
1996

ББК 22.233
К 41
УДК 533.9

Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных ис-
следований по проекту № 96-02—30069

Рецензенты:

Лаборатория нелинейной физики МФТИ (зав. лабораторией доцент *Ф. Ф. Каменец*),
д.ф.-м.н., *С. В. Буланов*

**КИНГСЕП А. С. Введение в нелинейную физику плазмы: Учеб. посо-
бие: Для вузов. — М.: Изд-во МФТИ, 1996. — 208 с. ISBN 5-89155-010-X**

Книга посвящена нелинейным эффектам в физике горячей плазмы, которые принципиально важны для понимания практически любого физического сценария, поскольку такая плазма ни в лаборатории, ни в естественных условиях никогда не бывает равновесной. Рассмотрены такие нелинейные режимы, как слабая турбулентность плазмы, сильная (солитонная) турбулентность, а также нелинейное затухание Ландау, ленгмюровские солитоны, эффекты электронной гидродинамики. Первоначальный уровень познаний в физике плазмы предполагается минимальным. Книга написана на основе ряда лекционных курсов.

Для студентов, аспирантов и научных работников, специализирующихся в физи-
ке плазмы, радиофизике, физической электронике и астрофизике.

Ил. 50. Библиогр. 45 назв.

Научное издание

КИНГСЕП Александр Сергеевич

ВВЕДЕНИЕ В НЕЛИНЕЙНУЮ ФИЗИКУ ПЛАЗМЫ

Набор и верстка выполнены в Издательстве МФТИ

Оператор DTPS *А. В. Чудинов*

Редактор *Л. П. Русакова*

Корректор *О. И. Холодкевич*

Художник *М. В. Ивановский*

ИБ № 7

ЛР № 064290 от 14.11.95. Подписано в печать 08.05.96. Формат 60×84/16.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная. Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 13,1.

Тираж 1000 экз. Заказ № 4268 С-005

Издательство Московского физико-технического института

141700, г. Долгопрудный Московской обл., Институтский пер., д. 9

Отпечатано в Московской типографии № 2 РАН

121099 Москва, Шубинский пер., 6

К 1604120000-005
96 **Без объявл.**

© А. С. Кингсеп, 1996

© Издательство МФТИ, 1996

ISBN 5-89155-010-X

Оглавление

Введение	5
Глава 1. Коллективные эффекты в плазме. Турбулентность плазмы и нелинейная динамика. Самогласованное описание плазмы	8
Глава 2. Приближение Власова. Ленгмюровские волны. Затухание Ландау	12
Глава 3. Нелинейная стадия затухания Ландау. Задача Мазитова–О’Нила. Волны Вап Кампена	23
Глава 4. Квазилинейная теория. Приближение случайных фаз. Резонансное взаимодействие «волна-частица» для ленгмюровских волн и ионного звука	29
Глава 5. Одномерная квазилинейная теория. Временная и пространственная постановка задачи. Неустойчивость пучка в плазме	41
Глава 6. Концепция слабой турбулентности как газа квазичастиц. Границы применимости квазилинейной теории	55
Глава 7. Нелинейное взаимодействие «волна-волна» и «волна-частица». Основные свойства. Возможности экспериментального наблюдения	65
7.1. Распадные процессы	65
7.2. Индуцированное рассеяние	75
Глава 8. Нелинейное взаимодействие «волна-волна» и «волна-частица». Примеры вычислений	81
8.1. Распадные процессы	82
8.2. Индуцированное рассеяние	87
Глава 9. Нелинейное взаимодействие «волна-волна» и «волна-частица». Сценарии слабой турбулентности	92
Глава 10. Коллективное взаимодействие «плазма-пучок». Нелинейная стабилизация пучковой неустойчивости. «Длина свободного пробега» пучка в плазме	100
Глава 11. Аномальное сопротивление и турбулентный нагрев плазмы. Ионно-звуковой режим. Динамика нагрева. Проблема убегающих электронов	110

Глава 12. Взаимодействие лазерного излучения с плазмой. Плазменная турбулентность в короне. Сильная турбулентность.	122
Глава 13. Модель Захарова. Ленгмюровские солитоны. Солитонная турбулентность	128
13.1. Основные уравнения	128
13.2. Ленгмюровский солитон	133
13.3. Взаимодействие солитонов с частицами	140
13.4. Солитонная турбулентность	149
Глава 14. Ленгмюровский коллапс	154
Глава 15. Сильная ленгмюровская турбулентность и проблема турбулентного нагрева плазмы	162
Глава 16. Солитоны и бесстолкновительные ударные волны	171
Глава 17. Электронная магнитная гидродинамика. Конвективные скиповые явления	179
17.1. Основные уравнения	179
17.2. Нелинейный транспорт поля. Конвективная волна переноса	182
17.3. Трансляция поля сторонним током	186
17.4. Модификация «классической» скиновой задачи	191
Глава 18. Сильноточные пучки и пинчи. Эффекты электронной магнитной гидродинамики	196
18.1 ЭМГ-сопротивление	197
18.2 Эффект Морозова–Шубина	201
18.3 Пинч малой плотности	203
Заключение	205
Список литературы	207

Введение

Эта книга базируется на лекционных курсах, прочитанных автором студентам Московского физико-технического института, а также — в какой-то части — физикам-экспериментаторам Курчатовского института. Имея в виду особенности аудитории, автор должен был стартовать с простых и по возможности фундаментальных эффектов. Зачастую базовые сведения по физике плазмы приходилось включать в курс нелинейной физики, равно как и некоторые нетривиальные моменты, относящиеся к теоретической физике. Как обычно, в лекционных курсах приходится — насколько это возможно — избегать ссылок на источники типа «можно показать, что...». На таком пути потери неизбежны, но, по глубокому убеждению автора, курсы лекций, как читанные, так и изданные, непременно должны предварять фундаментальные источники в освоении сложной физики.

Одна из важнейших черт физики плазмы — исключительное многообразие проблем и явлений, в особенности применительно к коллективным эффектам, — вряд ли возможно рассмотреть сколько-нибудь значительную часть их в едином лекционном курсе. По той же причине учебники в этой области обычно не слишком эффективны. Целью автора было грамотное введение в физику плазменной турбулентности с попутным рассмотрением как можно большего числа эффектов, представляющих универсальный интерес. Этой идее следует и настоящая книга.

Существуют разные научные подходы, используемые физикой плазмы: магнитная гидродинамика, статистическая термодинамика, столкновения частиц и излучение, плазмохимия и т.д. Мы будем в основном рассматривать нелинейные коллективные явления. Во-первых, это означает некоторую доминанту электродинамики (что, впрочем, для плазмы вообще характерно), и, во-вторых, мы будем воспринимать плазму как среду с преимущественно коллективной динамикой. В частности, плазма предполагается достаточно горячей и/или разреженной: $nr_{De}^3 \gg 1$, где n — концентрация электронов и r_{De} — дебаевский радиус.

Как хорошо известно, в газах все молекулы движутся почти свободно, и взаимодействие частиц газа (а тем самым и все свойства

его как сплошной среды) обеспечивается лишь более или менее частыми столкновениями. Как следствие происходит броуновское движение. В жидкой фазе частица обычно взаимодействует только с ближайшими соседями числом порядка единицы. В плазме же, хотя она и располагается по температурной шкале выше, чем жидкость и газ, ситуация напоминает скорее твердое тело — доминируют коллективные взаимодействия больших ансамблей частиц. Соответственно формальное описание плазменной микродинамики зачастую близко к таковому для твердого тела при том, что макроскопически плазма остается флюидом (в русской научной терминологии явно не хватает понятия, объединяющего жидкости и газы).

Нелишне также заметить, что и макроскопическое описание плазмы — магнитная гидродинамика — также воспроизводит механику конденсированных сред, а именно жидких металлов. Общей причиной всех этих особенностей является дальнедействующий характер кулоновских сил. Но чтобы быть уверенным, что имеешь дело именно с коллективной динамикой, а не просто с «газом» кулоновских частиц, нужно знать, что число одновременно взаимодействующих частиц — так называемое дебаевское число — достаточно велико:

$$nr_{De}^3 \approx T^{3/2} n^{-1/2} e^{-3} \gg 1. \quad (B.1)$$

Обычно такому ограничению удовлетворяет астрофизическая (особенно межзвездная) либо «термоядерная» лабораторная плазма.

Здесь и далее мы полагаем константу Больцмана равной единице, т. е. температуру измеряем в энергетических единицах. Кроме того, примем для простоты ионное зарядовое число (кратность ионизации) равным единице. Большинство эффектов, которые мы будем изучать, от этого числа не зависят. И, наконец, как принято в русскоязычной литературе по физике плазмы, мы будем пользоваться гауссовой системой единиц (СГС) как наиболее рациональной.

В плазме эффективные поля \mathbf{E} и \mathbf{V} отличаются от полей свободных зарядов и токов (соответственно \mathbf{D} и \mathbf{H}) лишь влиянием зарядов и токов, индуцированных в среде. Отклик плазмы на внешнее поле ограничивается индукцией свободных зарядов и токов проводимости. Их, как правило, включают непосредственно в уравнения Максвелла и не делают разницы между \mathbf{V} и \mathbf{H} , а также между \mathbf{E} и \mathbf{D} :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{E}, \mathbf{V}), \quad (B.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad (B.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}, \quad (B.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{E}, \mathbf{V}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (B.5)$$

Эта система уравнений комбинируется с уравнениями, описывающими движение частиц, — гидродинамическими либо кинетическими.

Главы 1—9 книги дают представление о концепции слабой турбулентности. Далее, в главах 10—12, приводятся примеры ряда турбулентных сценариев и даны некоторые предпосылки рассмотрения режима сильной турбулентности. Последняя представлена в главах 13 и 14 на наиболее содержательном примере сильной ленгмюровской турбулентности. В главе 16 даны минимальные сведения о бесстолкновительных ударных волнах, а главы 17 и 18 посвящены электронной магнитной гидродинамике, т. е. быстрой сильноточной электродинамике плазмы. Выбор тематики и порядок расположения глав отражает эволюцию интересов многих теоретиков-плазмистов, занимавшихся в 60-х—80-х годах физикой нелинейных явлений. Конечно, не последнюю роль здесь сыграли научные интересы автора. В свое оправдание автор — как выпускник и профессор МФТИ — может сослаться на один из главных принципов Физтеха: учить студентов на собственном опыте.

Работа содержит совсем немного ссылок — они даются в тех случаях, когда в данном курсе прямо воспроизводятся результаты оригинальных работ. При этом называются фамилии авторов и год публикации, а в конце книги все эти ссылки представлены в алфавитном порядке. При необходимости получить справку по тем или иным вопросам элементарной физики плазмы лучше всего обратиться к цитированному учебнику Франк-Каменецкого (хотя знание предмета в таком объеме в данной книге не предполагается).

Коллективные эффекты в плазме.

Турбулентность плазмы и нелинейная динамика.

Самосогласованное описание плазмы

Первый шаг в изучении коллективных свойств плазмы неизбежно связан с линейными колебаниями и волнами. Второй шаг уже может быть не столь детерминирован — все зависит от выбора базового объекта в нелинейной динамике. Можно взять в качестве такового нелинейные периодические волны, солитоны, ударные волны, вихри и т.п. Прежде всего, определяется «сценарий» нелинейной динамики, и здесь важнейший вопрос — имеем ли мы дело с хаотическим или регулярным нелинейным движением, иными словами — с турбулентностью или нелинейными структурами. Как часто бывает именно в нелинейной физике, сами эти понятия определены не очень четко, как и «окна параметров», в которых они реализуются, и в немалой степени эти моменты остаются на усмотрение автора. Обычно рабочие модели строятся на базе предыстории реального физического объекта. Исключительное многообразие таких предысторий и составляет главную трудность (но и самую привлекательную черту) нелинейной физики плазмы — немного существует столь же «многомерных» областей физики.

Мы начнем с концепции слабой турбулентности, выбирая в качестве фундаментального объекта квазиклассический волновой пакет. Это удобная модель для изучения турбулентного нагрева плазмы: токового и пучкового, определенных аспектов проблемы лазерного нагрева и некоторых других. Кроме того, она хорошо подходит для изучения эффектов переноса, микродинамики фронта ударной волны, эволюции космических лучей в межпланетной или межзвездной плазме — вообще всегда, когда существует какой-либо случайный фактор, особенно кинетические эффекты взаимодействия волн и частиц. Подобно коллективной теории твердого тела, мы можем описать подобные системы в рамках многокомпонентной кинетики, включающей электроны, различные сорта ионов и квазичастицы — плазменные волны.

Для начала обратимся к уравнениям (В.2)—(В.5). Плотности заряда ρ и тока \mathbf{j} определены в этих уравнениях как функции полей \mathbf{E} и \mathbf{V} . Такое описание — его называют самосогласованным — часто используется в физике плазмы, твердого тела, а также в ядерной физике. Оно дает возможность математически замкнуть модель и (в принципе) получить все необходимые результаты аналитически или посредством численного моделирования. На самом деле, конечно, это не всегда легко сделать. Достаточно обратить внимание на то, что линейные уравнения Максвелла мгновенно становятся нелинейными в рамках самосогласованной задачи. Заметим также, что уравнения (В.2)—(В.5) выписаны в неявном предположении, что поля \mathbf{E} и \mathbf{V} усреднены по некоторому физически малому объему в пространстве. Масштаб и характер такого усреднения остаются за рамками модели. Включая (В.2)—(В.5) в самосогласованную модель, плазму обычно рассматривают как непрерывную среду (кроме, конечно, численной модели типа «particle-in-cell»); так обычно и теряется этот масштаб. Немало теоретических работ посвящены уточнению и обоснованию подобных приближений, но в естественных науках есть и другой путь подтверждения адекватности модели — соответствие ключевых предсказаний теории наблюдаемым эффектам, и, в конце концов, это главное.

Попробуем сконструировать замкнутую систему уравнений, описывающую одновременно частицы и поля. Гидродинамика (точнее, магнитная гидродинамика — МГД), одно- или многокомпонентная, намного проще, чем кинетическое рассмотрение. Она, конечно, допускает описание лишь относительно узкого круга явлений, но это как раз самые фундаментальные явления в лабораторной и космической плазме. К тому же, как правило, чем проще модель, тем в ней дальше можно продвинуться. Итак, мы начинаем с гидродинамического описания динамики частиц. Чтобы в дальнейшем избежать вычислительных трудностей, никак собственно с нелинейной физикой не связанных, ограничимся самой простой формой МГД:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla P}{\rho} + \frac{1}{\rho c} [\mathbf{j}, \mathbf{V}]. \quad (1.2)$$

Мы пренебрегли источниками частиц любого знака в уравнении непрерывности (1.1) и вязкостью в уравнении Эйлера (1.2). Давление для простоты представлено в форме скаляра; довольно часто его можно задать политропой или какой-либо другой функцией плотности:

$$P = P(\rho). \quad (1.3)$$

В противном случае мы нуждались бы в дополнительных уравнениях, описывающих тепловые потоки. Уравнения (1.1)—(1.3) записа-

ны в стандартных обозначениях, как и (B.2)—(B.5). Надо иметь в виду, что плотность заряда в последних принято обозначать той же буквой ρ , что и плотность в магнитной гидродинамике. Но поскольку в рамках однокомпонентной МГД можно рассматривать только квазинейтральные течения, проблем с этим пересечением обозначений обычно не возникает.

Пока и поскольку мы остаемся в рамках гидродинамической модели, мы вынуждены будем использовать один несогласованный элемент, представляя, как обычно, связь $\mathbf{j}(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ в виде закона Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]), \quad (1.4)$$

где σ — скалярная проводимость плазмы. Избежать этого невозможно: \mathbf{j} замыкает «полевой» и «материальный» блоки нашей системы уравнений. Более корректна в этом отношении многокомпонентная МГД (для простоты мы ограничимся двухкомпонентным случаем):

$$Mn_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \nabla P_i = n_i e \mathbf{E} + n_i \frac{e}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}] + \frac{mn_e}{\tau} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \quad (1.5)$$

$$mn_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \nabla P_e = -n_e e \mathbf{E} - n_e \frac{e}{c} [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}] - \frac{mn_e}{\tau} (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \quad (1.6)$$

где m и M — электронная и ионная массы соответственно

$$\frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \nabla) \mathbf{v}_\alpha; \quad \alpha = i, e.$$

Уравнения (1.5), (1.6) должны быть дополнены уравнениями непрерывности

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \text{div} (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) = 0, \quad \alpha = i, e. \quad (1.7)$$

И, наконец, самосогласованная система уравнений получается как следствие замыкания:

$$\text{div} \mathbf{E} = 4\pi e(n_i - n_e), \quad (1.8)$$

$$\mathbf{j} = e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e). \quad (1.9)$$

Применимость такой двухкомпонентной (или двухмаксвелловской) модели обеспечивается определенной иерархией времен релаксации:

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} \cong 1 : (M/m)^{1/2} : M/m.$$

Самое длинное из этих времен (или, что то же, эффективная частота столкновений $\nu_{ei} \equiv 1/\tau_{ei} \equiv 1/\tau$) входит явно в правую часть

уравнений (1.5), (1.6) как фактор электрон-ионного трения. Как будет ясно из дальнейшего, в теории линейных колебаний и волн в плазме этим трением нередко можно вообще пренебречь — тогда система (B.2)–(B.5), (1.5)–(1.9) выглядит совершенно замкнутой. К сожалению, строгость такого описания достаточно иллюзорна: чем больше τ , тем важнее роль кинетических эффектов. Тем не менее, таким образом часто моделируется нелинейная динамика в бесстолкновительной или слабостолкновительной плазме. Некоторые примеры будут даны в последующих главах.

Если мы хотим учесть и кинетические эффекты, то необходимо выбрать наиболее простую базовую модель, чтобы какие-либо нетривиальные проявления не маскировали собственно нелинейной физики и можно было, хотя бы в упрощенной форме, получить содержательный результат. В физике плазмы обычно хорошо работает простое одночастичное уравнение Больцмана. Исходя из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} (n\mathbf{v}) = S(\mathbf{r}),$$

где $S(\mathbf{r})$ — источник частиц, нетрудно по аналогии написать и уравнение Больцмана в дивергентной форме, т.е. уравнение непрерывности для функции распределения частиц, которую можно интерпретировать как плотность в фазовом пространстве:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \operatorname{div} (f\mathbf{v}) + \operatorname{div}_{\mathbf{p}} \left(f \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \right) = \operatorname{St} (f), \quad (1.10)$$

где $\operatorname{div}_{\mathbf{p}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$ и $\operatorname{St} (f)$ — так называемый интеграл столкновений (в физике плазмы его обычно берут в форме Ландау, но для нас это, в сущности, не так уж и важно, поскольку мы не будем подробно останавливаться на столкновительных эффектах). Очень часто пользуются гамильтоновой формой уравнения Больцмана. Пользуясь известными соотношениями

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial t} = - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (1.11)$$

где H — функция Гамильтона, можно преобразовать (1.10) к стандартной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla f + \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \operatorname{St} (f). \quad (1.12)$$

Используются две эквивалентные формы (1.12):

$$\frac{df}{dt} = \operatorname{St} (f) \quad \text{или} \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = \operatorname{St} (f),$$

где $\{f, H\}$ — скобка Пуассона.

Теперь нам следует замкнуть систему кинетических уравнений и уравнений Максвелла. Этот принципиальный шаг был сделан А. Власовым.

Приближение Власова. Ленгмюровские волны. Затухание Ландау

Приближение Власова в физической кинетике плазмы соответствует так называемому бесстолкновительному пределу $St(f) = 0$. Таким образом оказывается возможным адекватно описать весьма широкий класс экспериментальных ситуаций в горячей (до 10^8 К) лабораторной плазме или в очень разреженной ($n \sim 1 \text{ см}^{-3}$) космической. Во-первых, столкновения оказываются несущественны при очень коротких характерных временах эксперимента, малых по сравнению с v_{ei}^{-1} . Во-вторых, то же приближение работает в случае достаточно малых размеров плазменного облака (или всей установки) по сравнению с характерной длиной пробега частиц. В газе этот режим называется кнудсеновским и соответствует глубокому вакууму. Бесстолкновительная плазма, однако, ведет себя совершенно иначе, чем кнудсеновский газ.

Еще один важный элемент приближения Власова — это непосредственная подстановка гамильтониана в кинетическое уравнение (1.12) или (1.13). В нерелятивистском пределе и в X-представлении (1.12) принимает вид

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f^\alpha + \frac{e}{m_\alpha} \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}, \mathbf{B} \right] \right) \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.1)$$

где $\alpha = i, e$. Для замыкания системы уравнений Максвелла и системы (2.1) используются естественные соотношения

$$\rho = \sum_{\alpha} n e_{\alpha} \int f^{\alpha} d\mathbf{v}, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n e_{\alpha} \int f^{\alpha} \mathbf{v} d\mathbf{v}, \quad (2.3)$$

где в качестве концентрации n фигурирует величина, усредненная по некоторому физически малому объему. Это и есть модель Власова, т.е. самосогласованная бесстолкновительная кинетика плазмы.

Нормировка функции распределения выбирается из соображений удобства; мы нормируем f^α на единицу:

$$\int f^\alpha d\mathbf{v} = 1. \quad (2.4)$$

Интересно, что сам Власов полагал, что интеграл столкновений для самосогласованной кинетической теории вообще не нужен, поскольку все взаимодействия частиц уже включены в самосогласованное поле. В действительности ситуация несколько сложнее. Известно, что кулоновское взаимодействие может быть представлено в форме столкновений лишь при условии некоторого обрезания на малых углах рассеяния, или, что то же, на малых величинах переданного импульса. В плазме это обрезание соответствует дебаевскому радиусу как верхнему пределу прицельного параметра. Таким образом, вклад более далеких столкновений игнорируется, хотя отчасти он учитывается самосогласованным полем. Для тройных соударений уже более существенная доля их вклада представляется таким образом, и т.д. Чем выше порядок столкновений, тем они лучше учтены в приближении Власова. Этому вопросу было посвящено немало теоретических работ, но достаточно ясной аналитической модели, по видимому, построить нельзя. Как правило, хорошо работает простой рецепт: приближение Власова комбинируется с парными столкновениями, обрезанными должным образом.

Наш следующий шаг — конструктивное приложение модели Власова к конкретному явлению — наиболее фундаментальной модой волн в плазме, которые называются ленгмюровскими волнами (или просто плазменными волнами). Эти волны высокочастотные и, как следствие, чисто электронные. Они не сохраняют квазинейтральности, хотя в волне малой амплитуды она нарушается незначительно. Смещение ионов в волне, равно как и их вклад в дисперсию, пренебрежимо малы. (Мы ограничиваемся напоминанием этих хорошо известных фактов, поскольку понятие о ленгмюровских волнах входит даже в курс общей физики и, во всяком случае, может быть восстановлено, например по учебнику Д. А. Франк-Каменецкого. Впрочем, вся эта информация может быть извлечена из дальнейшего нашего рассмотрения.)

Ленгмюровские волны являются потенциальными ($\mathbf{E} = -\nabla\phi$), если волновое число не слишком мало, $k > \omega_{pe}/c$, где $\omega_{pe} = (4\pi ne^2/m)^{1/2}$ — электронная плазменная частота. В частности, это значит, что магнитное поле волны $\mathbf{B}_\sim = \mathbf{0}$. Если и внешнее магнитное поле также равно нулю, мы можем вообще положить $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ в уравнении (2.1). Напомним общий вид закона дисперсии потенциальных волн:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0. \quad (2.5)$$

Простейший вид диэлектрической проницаемости также хорошо известен:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (2.6)$$

Уравнение (2.6) справедливо в приближении холодной плазмы или в любом из двух пределов: длинноволновом или высокочастотном. В общем же случае его следует модифицировать с учетом дисперсии.

Для обеспечения наших последующих нужд рассмотрим эту задачу в рамках многокомпонентной гидродинамической модели, ограничивая себя лишь потенциальными волнами и нулевым внешним магнитным полем. Это позволяет использовать следующую базовую систему уравнений:

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_{0\alpha} \nabla) \mathbf{v}_\alpha = - \left(\frac{e}{m} \right)_\alpha \nabla \varphi - \gamma_\alpha v_{T\alpha}^2 \left(\frac{\nabla n_\alpha}{n_{0\alpha}} \right), \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_{0\alpha} \nabla n_\alpha + n_{0\alpha} \operatorname{div} \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad (2.8)$$

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha, \quad (2.9)$$

где $v_{T\alpha} = (T_\alpha/m_\alpha)^{1/2}$ — тепловая скорость, γ — показатель политропы, $\mathbf{v}_{0\alpha}$ и $n_{0\alpha}$ — соответственно невозмущенная скорость и концентрация каждого компонента, \mathbf{v}_α и n_α — то же для возмущений.

Заметим, что не только двухкомпонентная плазма ($\alpha = i, e$) может быть описана данной системой уравнений. Можно учесть несколько сортов ионов, несколько фракций одного компонента, отличающихся, прежде всего, направленной скоростью (многопучковая модель). Далее систему (2.7)–(2.9) можно линеаризовать в предположении квазинейтральности:

$$\sum_\alpha n_{0\alpha} e_\alpha = 0, \quad (2.10)$$

но не считая при этом равным нулю (вообще говоря) полный ток. Поскольку мы изучаем волновые движения, положим все возмущения пропорциональными $\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t)$. В результате исходная система уравнений приводится к следующему виду:

$$-i\omega \mathbf{v}_\alpha + i(\mathbf{k}\mathbf{v}_{0\alpha}) \mathbf{v}_\alpha = -ik \left(\frac{e}{m} \right)_\alpha \varphi - ik \gamma_\alpha v_{T\alpha}^2 \frac{n_\alpha}{n_{0\alpha}}, \quad (2.11)$$

$$-i\omega n_\alpha + ik \mathbf{v}_{0\alpha} n_\alpha + n_{0\alpha} ik \mathbf{v}_\alpha = 0, \quad (2.12)$$

$$-k^2 \varphi = - \sum_\alpha n_\alpha e_\alpha. \quad (2.13)$$

Затем из (2.12) следует

$$\mathbf{k}\mathbf{v}_\alpha = \frac{n_\alpha}{n_{0\alpha}} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{0\alpha}),$$

что в свою очередь может быть подставлено в скалярное произведение \mathbf{k} и всего уравнения (2.11):

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{0\alpha})^2 \frac{n_\alpha}{n_{0\alpha}} = k^2 \left(\frac{e}{m} \right)_\alpha \varphi + k^2 v_{T\alpha}^2 \gamma_\alpha \frac{n_\alpha}{n_{0\alpha}}.$$

Можно подставить $\varphi(n_\alpha)$ из последнего уравнения в (2.13) и затем сократить его, как это всегда делается в линейной теории. В результате получаем

$$1 - \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 / [(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{0\alpha})^2 - \gamma_\alpha k^2 v_{T\alpha}^2] = 0, \quad (2.14)$$

где $\omega_{p\alpha}^2 = 4\pi n_\alpha e_\alpha^2 / m_\alpha = 4\pi n_\alpha Z_\alpha^2 e^2 / m_\alpha$ — ленгмюровская (плазменная) частота данного компонента плазмы. Как легко видеть, (2.14) есть обобщение соотношений (2.5), (2.6), откуда сразу следует обобщающее выражение для диэлектрической проницаемости с учетом многокомпонентности, многопоточности и тепловой дисперсии:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2 / [(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{0\alpha})^2 - \gamma_\alpha k^2 v_{T\alpha}^2]. \quad (2.15)$$

Полезно иметь в виду некоторый элемент принципиальной незамкнутости гидродинамической модели. Хотя мы воспользовались самой примитивной политермической зависимостью $P(n)$, даже в этом приближении у нас остается параметр γ_α , которой приходится вводить «руками». В кинетике, однако, этот вопрос никаких проблем не создает.

Получим простейший закон дисперсии ленгмюровских волн. Учтем, что эти волны — чисто электронной природы, и выведем из рассмотрения ионный вклад в дисперсию (формально он был бы малой поправкой порядка m/M); положим также для простоты $\mathbf{v}_{0\alpha} = 0$:

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{Te}^2}. \quad (2.16)$$

Определим заранее, что $\gamma_e = 3$ (одномерная адиабата). Через несколько страниц это утверждение будет доказано как следствие кинетического рассмотрения. Кроме того, еще раз апеллируя к кинетике, предположим, что $k^2 v_{Te}^2 \ll \omega^2 \cong \omega_{Te}^2$, или, что то же, $kr_{De} \ll 1$, где $r_{De} \equiv v_{Te} / \omega_{pe}$ — дебаевский радиус. Таким образом,

мы можем представить две эквивалентные формы конечного результата:

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2, \quad (2.17)$$

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2\right). \quad (2.18)$$

Имея в распоряжении опорные соотношения (2.17), (2.18), мы можем рассмотреть ту же задачу в рамках кинетики. Как мы вскоре увидим, модификация результатов будет довольно значительной. В случае электростатических ленгмюровских волн основное уравнение (2.1) может быть записано в упрощенном виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)f + \frac{e}{m} \nabla\varphi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (2.19)$$

где $f \equiv f_e$, а ионный вклад пренебрежимо мал — порядка m/M , $M \equiv m_i$, как, например, можно оценить из (2.11), (2.12). Для получения замкнутой системы уравнений воспользуемся уравнением Пуассона и уравнением (2.2):

$$\nabla^2\varphi = 4\pi ne \int f d\mathbf{v}. \quad (2.20)$$

Теперь применим преобразование Фурье к линейризованным уравнениям (2.19), (2.20):

$$-i\omega f_{\mathbf{k}} + i\mathbf{k}\mathbf{v}f_{\mathbf{k}} + i\frac{e}{m}\mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \Phi_{\mathbf{k}} = 0, \quad (2.21)$$

$$-k^2\Phi_{\mathbf{k}} = 4\pi ne \int f_{\mathbf{k}} d\mathbf{v}, \quad (2.22)$$

где $f_{\mathbf{k}}$ — амплитуда возмущения функции распределения, обусловленного волновым возмущением $\Phi_{\mathbf{k}}$ на фоне невозмущенной функции f_0 . В результате из (2.21) получаем

$$f_{\mathbf{k}} = \frac{e}{m} \frac{\mathbf{k} \partial f_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \Phi_{\mathbf{k}}, \quad (2.23)$$

что после подстановки в (2.22) дает

$$-k^2\Phi_{\mathbf{k}} = \omega_{pe}^2 \Phi_{\mathbf{k}} \int \frac{\mathbf{k} \partial f_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{v}. \quad (2.24)$$

Волновое возмущение $\Phi_{\mathbf{k}}$ можно в линейном приближении сократить, и в итоге мы располагаем кинетическим обобщением уравнения (2.16):

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{k}\right)^2 \int \frac{\mathbf{k} \partial f_0 / \partial \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d\mathbf{v} = 0. \quad (2.25)$$

Рассмотрим для начала предел $\omega/k \gg v_{Te}$, полагая тем самым величину $f(\omega/k)$ экспоненциально малой и, следовательно, полюс

подынтегрального выражения несущественным. Интегрируя по частям правую часть (2.25), легко получить:

$$0 = 1 - \omega_{pe}^2 \int dv \frac{f_0}{(\omega - kv)^2} \cong 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (2.26)$$

что в точности совпадает с (2.6). Это случай холодной плазмы. Взяв теперь в качестве f_0 максвелловскую функцию

$$f_0 = (\pi v_{Te}^2)^{-3/2} \exp(-v^2/2v_{Te}^2),$$

мы можем дополнить (2.26) разложением в виде ряда по малому параметру kv_{Te}/ω . Не станем останавливаться на деталях вычислений, но подчеркнем главное: разложение не совпадает с (2.16), но его первый не исчезающий поправочный член приводит к закону дисперсии (2.18) и тем самым подтверждает введенное в гидродинамическую модель предположение $\gamma = 3$. Существенно, что даже в случае максвелловской фоновой функции гидродинамический результат нуждается в определенной коррекции. Но главное — даже не уточнение поправок к закону дисперсии, а новый вид диссипации, который следует из кинетического рассмотрения.

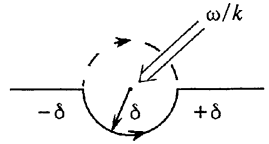


Рис. 2.1. Полос $v = \omega/k$ в комплексной плоскости

Упростим насколько возможно уравнение (2.25), введя разделение переменных: $f_0 = f_{\perp}(\mathbf{v}_{\perp}) f(v)$, где $\mathbf{v}_{\perp} \perp \mathbf{k}$ и v — компонента скорости, параллельная \mathbf{k} . Тогда

$$\varepsilon = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f/\partial v}{\omega - kv} dv = 0.$$

Re ε уже вычислена, здесь в принципе добавить нечего. Учтем вклад полюса $\omega - kv = 0$, который не может быть нулевым, даже если $\omega/k \gg v_{Te}$. Мнимый вклад в интеграл, очевидно, определяется малой окрестностью полюса:

$$\text{Im } \varepsilon \sim \text{Im} \int_{\omega/k-\delta}^{\omega/k+\delta} dv \frac{\partial f/\partial v}{\omega/k - v}.$$

Введем в рассмотрение комплексную плоскость v (рис. 2.1). Возникает проблема обхода полюса — два разных пути дадут вклад разного знака (при интегрировании различается знак вычета). Можно было бы, конечно, следовать первоначальной работе Ландау (1948 г.), где использовалась техника преобразования Лапласа, но в контексте данного курса более привлекательными выглядят простые физические соображения. К тому же, в нелинейном приближении, которое мы далее будем обсуждать, уже не существует столь же

строгой математической процедуры, тогда как качественные аргументы вполне сохраняют силу.

Рассмотрим волну малой, но конечной амплитуды и выделим две группы частиц в пространстве скоростей: группа (1) будет обгонять волну ($v > \omega/k$), а группа (2) — отставать от нее ($v < \omega/k$). (При этом мы рассматриваем частицы со скоростями, близкими к ω/k .) Как можно увидеть из рис. 2.2, группа (1) теряет энергию из-за за-

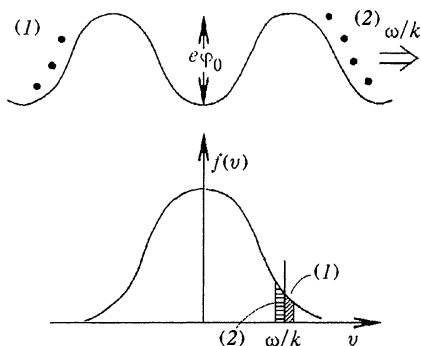


Рис. 2.2. Вверху: резонансные частицы в системе отсчета волны; внизу: то же представлено в виде электронного распределения

медления в поле потенциальной ямы в системе отсчета волны, в то время как группа (2), напротив, приобретает энергию. Таким образом, волна теряет энергию, т.е. затухает при условии, что населенность группы (2) больше, чем группы (1), или, что то же, $\partial f / \partial v |_{v=\omega/k} < 0$ (см. рис. 2.2). Эти рассуждения позволяют выбрать путь вокруг полюса, обозначенный на рис. 2.2 сплошной линией. Определим на комплексной плоскости $\omega/k - v = \delta \exp(i\psi)$; тогда $dv = -i\delta \exp(i\psi) d\psi$, и интеграл принимает вид

$$i \operatorname{Im} \varepsilon \sim \int_0^{\pi} \frac{i\delta \exp(i\psi)}{\delta \exp(i\psi)} d\psi \frac{\partial f}{\partial v} = -\pi i \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Соответственно $\operatorname{Im} \varepsilon = -\pi(\varepsilon/k)^2 \partial f / \partial v > 0$.

В предположении малости затухания $|\gamma| \ll \omega$, где $\gamma = \operatorname{Im} \omega$ — инкремент, можно получить

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 = 0 = \varepsilon_1(\omega_0) + i\gamma \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega} + i\varepsilon_2,$$

где $\omega_0 = \operatorname{Re} \omega$ — главный член, определяющий линейную дисперсию. Напомним, что $\varepsilon_1(\omega_0) = 0$. Отсюда и следует конечный результат:

$$\gamma = -\varepsilon_2 / \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \omega} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega^3}{k^2} \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=\omega/k}. \quad (2.27)$$

В случае максвелловской фоновой функции он выглядит следующим образом:

$$\gamma = -\frac{\pi^{1/2}}{2} \omega \left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \right)^3 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{kv_{Te}} \right)^2 \right]. \quad (2.28)$$

Из (2.28) следует, в частности, что $\gamma \approx -\omega$ при $kr_D \rightarrow 1$, так что ленгмюровские волны могут существовать как таковые лишь при условии, что длина волны много больше дебаевского радиуса; в противном случае волна затухает за время порядка периода. Соответственно дисперсионная поправка в (2.18) всегда много меньше электронной плазменной частоты, а $\omega/k \gg v_{Te}$. Этим мы подтверждаем справедливость сделанных ранее приближений.

В общем случае мы можем, не разделяя переменных, ввести простое формальное правило обхода полюса:

$$\frac{1}{x-\alpha} = P \left[\frac{1}{x-\alpha} \right] + \pi i \delta(x-\alpha), \quad (2.29)$$

где P означает интеграл в смысле главного значения. Отсюда следует:

$$\gamma = -\frac{\omega^3}{2\omega_{pe}^2} \text{Im } \varepsilon = \frac{\pi}{2} \frac{\omega^3}{k^2} \int \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.30)$$

Еще один результат будет нам полезен. Предположим, что f_0 — изотропное распределение: $f_0 = f_0(v)$, где $v = |\mathbf{v}|$. Пусть $\theta = \angle \mathbf{k}\mathbf{v}$; тогда $\partial f / \partial \mathbf{v} = (\mathbf{v}/v) \partial f / \partial v$, и окончательно

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\pi}{2} \frac{\omega^3}{k^2} \int 2\pi v \frac{\partial f_0}{\partial v} \mathbf{k}\mathbf{v} dv \int \delta(\omega - kv \cos \theta) d \cos \theta = \\ &= -\pi^2 \omega [v^3 f_0(v)]_{v=\omega/k}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Между прочим, мы доказали своего рода теорему: изотропное распределение всегда устойчиво, волны на его фоне могут только затухать. Никакое возбуждение волн невозможно, если функция f_0 изотропна, причем совершенно неважно, как именно она зависит от v .

Простейшей моделью такой диссипации является одномерная, и ряд достаточно принципиальных эффектов может быть на ней продемонстрирован. Рассмотрим, например, обращенное затухание Ландау, которое обычно называют двухпоточковой неустойчивостью. Пусть электронное распределение имеет вид, представленный на рис. 2.3, т. е. состоит из основного распределения f_e и пучка f_b , причем неустойчивая область заштрихована: $(\omega/k)_{\text{unst}} \approx v_b \gg v_{Te}$.

Начнем с уравнения (2.15), модифицированного применительно к данному случаю:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \omega_{pe}^2 \frac{n_b}{n} \frac{1}{(\omega - \mathbf{k}v_b)^2} = 0; \quad (2.32)$$

при этом тепловой скоростью пучка ($v_{Tb} \approx \Delta v_b$) мы пренебрегаем, а также полагаем $n_b/n \ll 1$. Уравнение (2.32) — чисто гидродинамическое, затухания Ландау оно не содержит. Тем не менее, одна из

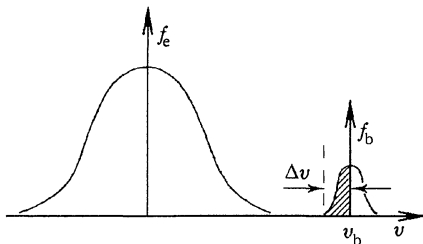


Рис. 2.3. Электронное распределение «плазма-пучок»

пучковых неустойчивостей следует уже отсюда. Не анализируя всех его решений, укажем непосредственно на эту возможность. Ищем решение в виде $\omega = \omega_{pe} + \delta\omega \cong \mathbf{k}v_b + \delta\omega$:

$$2 \frac{\delta\omega}{\omega_{pe}} - \frac{n_b}{n} \left(\frac{\omega_{pe}}{\delta\omega} \right)^2 = 0. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) имеет один вещественный и два комплексно-сопряженных корня:

$$\delta\omega = \omega_{pe} \left(\frac{n_b}{2n} \right)^{1/3} \left\{ 1; \frac{1}{2} (\pm \sqrt{3}i - 1) \right\}. \quad (2.34)$$

Среди них есть одно неустойчивое решение, у которого $\omega \cong \cong \omega_{pe} \cong \mathbf{k}v_b$, а инкремент равен

$$\gamma_{hd} = 3^{1/2} \cdot 2^{-4/3} \left(\frac{n_b}{n} \right)^{1/3} \omega_{pe}. \quad (2.35)$$

Напомним, что результат получен в предположении $kv_{Tb} \ll \delta\omega$, которое теперь может быть представлено в виде

$$\frac{v_b}{v_{Tb}} \gg \left(\frac{n}{n_b} \right)^{1/3}. \quad (2.36)$$

Вернемся к кинетическому дисперсионному соотношению (2.25); для нашего случая его можно немного упростить:

$$\varepsilon = 0 \cong 1 - \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{\omega_{pe}}{k}\right)^2 \int \frac{d\mathbf{v}}{\omega} \mathbf{k} \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}}; \quad (2.37)$$

здесь и далее $\tilde{\omega} \equiv \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$. Заметим, что $\int f_b d\mathbf{v} = n_b/n$. Учтем то обстоятельство, что на самом деле ни в линейной, ни в нелинейной физике не может быть «чистых» резонансов. На самом деле ширина резонансной линии $\omega(\mathbf{k})$ не может быть меньше, чем $\text{Im } \omega \equiv \gamma(\mathbf{k})$. Таким образом, можно сделать оценку $\tilde{\omega}_{\min} \approx \gamma$, но тогда $\partial f_b / \partial v \approx \approx n_b/n(\Delta v)^2$. Если функция $\partial f / \partial v$ образует пик, более острый, чем полюс $\tilde{\omega}^{-1}$, интеграл в (2.37) можно брать по частям. В результате получится соотношение (2.32), а в конечном счете — (2.35). В обратном пределе вычет в (2.37) доминирует; тогда, скажем в одномерном случае, приходим к результату (2.27), который для оценки можно переписать в виде

$$\gamma(\mathbf{k}) = \frac{\pi\omega^3}{2k^2} \frac{\partial f_b}{\partial v} \approx \omega_{pe} v^2 \frac{f_b}{\Delta v} \approx \omega_{pe} \frac{n_b}{n} \left(\frac{v}{\Delta v}\right)^2. \quad (2.38)$$

Чтобы определить окно параметров, в которых кинетические эффекты доминируют (т.е. главным оказывается вклад полюса), воспользуемся оценкой $\gamma/\omega \ll \Delta v/v$, а дальше, используя (2.38), без труда приходим к неравенству, обратному (2.36). Любопытно, что (2.35) и (2.38) совпадут, если (2.36) преобразовать в равенство, хотя получены они в рамках разных моделей.

Итак, в настоящей главе мы рассмотрели затухание Ландау линейных ленгмюровских волн и обращенное затухание Ландау, или пучковую (двухпотокую) неустойчивость. В последнем случае заслуживает внимания переход между кинетическим и гидродинамическим режимами — в этой задаче они с достаточной степенью корректности могут быть сшиты друг с другом.

В заключение отметим еще одно фундаментальное свойство рассмотренных процессов. Обратим внимание на то, что резонансное условие $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$ совпадает с хорошо известным условием черенковского излучения электромагнитных волн частицей, движущейся в среде со скоростью, большей, чем фазовая скорость волн в этой же среде.

Представим себе квант (квазичастицу) ленгмюровских волн — ее обычно называют плазмоном. Ее импульс и энергия должны быть равны, как обычно, $\hbar\mathbf{k}$ и $\hbar\omega$ соответственно (где $\hbar \equiv h/2\pi$ — постоянная Планка). Как следствие закон сохранения энергии при электрон-плазмонном резонансном взаимодействии должен иметь вид

$$\frac{p_e^2}{2m} = \frac{(\mathbf{p}_e - \hbar\mathbf{k})^2}{2m} + \hbar\omega. \quad (2.39)$$

При типичных параметрах $T \approx 10 \div 10^4$ эВ и $n \approx 10^{10} \div 10^{21}$ см⁻³ справедливо сильное неравенство $\hbar\omega_{pe} \ll T$ (проверьте!), что, в свою очередь, обеспечивает справедливость цепочки неравенств

$$\hbar k \ll \frac{h}{r_{De}} = \frac{\hbar\omega_{pe}}{v_{Te}} \ll \frac{T}{v_{Te}} \approx p_e.$$

Таким образом, мы можем пренебречь членом $(\hbar\mathbf{k})^2/2m$ в (2.39) и окончательно получаем

$$\hbar\omega - \frac{\hbar\mathbf{k}\mathbf{p}}{m} = 0,$$

а это как раз условие черенковского резонанса. Этот вывод будет для нас чрезвычайно важен в последующих главах.

Нелинейная стадия затухания Ландау. Задача Мазитова–О’Нила. Волны Ван Кампена

Проблемы, которые мы будем обсуждать в этой главе, не являются принципиально важными для последующих глав, поскольку рассмотренный круг эффектов не будет использоваться при конструировании турбулентных моделей и сценариев. Нам следует, однако, с ними познакомиться, так как они нередко проявляются себя в численном эксперименте и поэтому часто оказываются предметом обсуждения в научных публикациях (им зачастую уделяется даже преувеличенное внимание). Речь пойдет о нелинейном режиме затухания Ландау волн конечной амплитуды. Поскольку в численном эксперименте из экономии времени счета амплитуда волн обычно завышается и часто используются одномерные модели (а интересны как раз существенно одномерные проявления нелинейного затухания Ландау), постольку результаты настоящей главы интересны прежде всего с точки зрения интерпретации численных экспериментов.

В гл. 2 мы рассмотрели взаимодействие «волна—частица» в линейном приближении относительно фонового распределения — иными словами, мы пренебрегли эволюцией резонансных частиц за время затухания $1/\gamma$. Теперь же мы обращаемся к противоположному случаю — будем работать в приближении слабого изменения амплитуды волны за время эволюции частиц. Возьмем, например, синусоидальную волну конечной амплитуды (рис. 3.1, сверху) и проследим за частицами в системе отсчета волны, т.е. движущейся со скоростью ω/k . По характеру взаимодействия с волной частицы

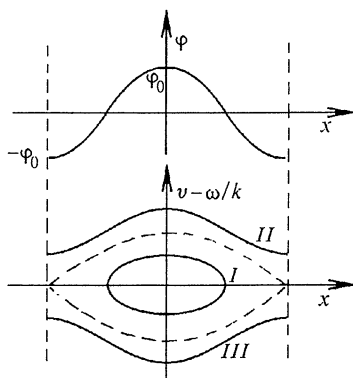


Рис. 3.1. Вверху: электростатический потенциал в системе отсчета волны. Внизу: траектории электронов в фазовой плоскости: I — захваченные, II и III — пролетные

можно разделить на две группы. Оба типа фазовых траекторий представлены на рис. 3.1, внизу. Если $m(v - \omega/k)^2/2 < \varphi_0$, такие частицы (в данном случае — электроны) захвачены в потенциальную яму волны, так что их траектории (I) в системе отсчета волны оказываются финитными. Если же имеет место обратное неравенство, движение частицы (траектории II и III) оказывается инфинитным — такие электроны называются пролетными. Пунктирная линия на рис. 3.1 соответствует сепаратрисе между этими двумя областями в фазовом пространстве. Формально это третий сорт частиц, но — опять-таки формально — это множество меры нуль, т.е. фактически доля их пренебрежимо мала.

Уравнение движения захваченных электронов (см. рис. 3.1):

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = e \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -e\varphi_0 \sin kx. \quad (3.1)$$

В предположении достаточной малости кинетической энергии в системе отсчета волны яму можно аппроксимировать параболическим профилем; тем самым уравнение (3.1) вырождается в линейное. Его решение тривиально: гармонические осцилляции захваченных частиц вблизи дна ямы с так называемой баунс-частотой (bounce):

$$\Omega = k(e\varphi_0/m)^{1/2}. \quad (3.2)$$

Чем больше амплитуда этих колебаний, тем меньше баунс-частота (не в (3.2), но в реальном точном решении). При стремлении положения частицы в фазовом пространстве к сепаратрисе частота Ω стремится к нулю. При этом существенно, что периоды колебаний частиц в яме, вообще говоря, несоизмеримы. В итоге происходит обмен энергией между волной и захваченными частицами. Пусть в начальный момент электронная функция распределения была гладкой (сплошная кривая на рис. 3.2). Из-за баунс-осцилляций эта функция становится существенно немонотонной внутри области захвата в пространстве скоростей:

$$|v - \omega/k| < \Delta v \approx (e\varphi_0/m)^{1/2} \quad (3.3)$$

(кривая I на рис. 3.2). Чем более изрезанным становится распределение захваченных электронов, тем активнее работают кулоновские столкновения, выглаживающие эту кривую. Хотя мы и стартовали с бесстолкновительного приближения (уравнение Власова), мы не сможем удержаться в рамках этой модели при достаточной изрезанности функции распределения $f(v)$. Причина в том, что кулоновский интеграл столкновений $St(f)$ — возьмем его в форме Ландау — чувствителен к гладкости функции распределения:

$$St(f) \sim \int d(\mathbf{v} - \mathbf{v}') \left[f(\mathbf{v}) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}'} - f(\mathbf{v}') \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right].$$

Итак, столкновения действительно вступают в игру, сглаживая $f(v)$ в области захвата (3.3). Здесь формируется «плато» на электронной функции распределения (кривая 2 на рис. 3.2). Это сразу

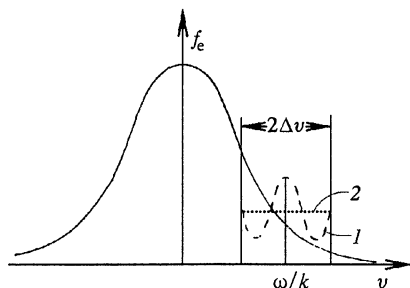


Рис. 3.2. Эволюция электронной функции распределения вследствие нелинейного затухания Ландау: начальное распределение, 1 — промежуточное распределение, 2 — конечное распределение

следует из того обстоятельства, что для «отключения» столкновений нужно устремить $\partial f/\partial v$ к нулю. Нетрудно оценить энергию, переданную вследствие этого процесса резонансным (захваченным) частицам. Начальная плотность энергии равна

$$W_i = \frac{1}{8\pi} \langle E^2 \rangle \frac{\partial(\epsilon\omega)}{\partial\omega} = \frac{k^2\varphi_0^2}{8\pi}. \quad (3.4)$$

Конечная плотность энергии $W_f = W_i - \Delta W_e$, где

$$\Delta W_e \approx \Delta(mv^2/2)_e \Delta n_{tr}, \quad \Delta n_{tr} \approx (f_{tr} - f_0) \Delta v.$$

Далее, оценивая $\Delta(mv^2/2)_e$ как $m\Delta v\omega/k$ и f_{tr} как $n_{tr}/\Delta v$ (индекс tr означает захваченные частицы), получаем

$$\Delta W_e \approx m \frac{\omega}{k} \frac{\partial f_0}{\partial v} (\Delta v)^3 n \approx mn \frac{\omega}{k} \frac{\partial f_0}{\partial v} \left(\frac{e\varphi_0}{m} \right)^{3/2}. \quad (3.5)$$

Соотношение (3.5) позволяет сразу же оценить пределы применимости линейной теории затухания Ландау. Если энергетические потери, следующие из (3.5), существенно превышают начальную плотность энергии в (3.4):

$$\frac{k^2\varphi_0^2}{8\pi} \ll \Delta W_e \Rightarrow \left(\frac{e\varphi_0}{m} \right)^{1/2} < v^3 \frac{\partial f_0}{\partial v}, \quad (3.6)$$

то волна должна затухнуть еще на линейной стадии. Условие (3.6) может быть переписано в эквивалентной форме:

$$\Omega \ll \gamma_L, \quad (3.7)$$

где γ_L — характерный инкремент затухания Ландау.

Представляется принципиально важным вопрос о роли столкновений в таком «бесстолкновительном» затухании. Грубо оцененная частота столкновений $\nu_{ci} \approx \omega_{pe} \ln N_D/N_D$ (где $N_D = nr_{De}^3$ — дебаевское число) может быть пренебрежимо малой величиной по сравнению с характерным масштабом обратного времени задачи. Тем не менее, только столкновения могут обеспечить истинное затухание (а не просто искажение функции распределения). Именно это обстоятельство снимает безусловный парадокс диссипации, следующей из эволюции в рамках бесстолкновительного и обратимого во времени уравнения Власова. Конечно, настоящее затухание должно сопровождаться ростом энтропии. Но вот что любопытно: ни инкремент γ , ни условия линейности (3.6), (3.7) не зависят от частоты столкновений. Такое иногда случается в физике, и самым известным тому примером может служить обычная ударная волна — как известно, самим существованием она обязана конкуренции нелинейности и диссипации, но последняя никак не входит в параметры УВ и определяет лишь структуру фронта. В гл. 18 будет дан еще один содержательный пример такого рода — ЭМГ-противление.

Вернемся к нелинейной стадии затухания Ландау. Не только захваченные электроны получают энергию от волны, но и пролетные, хотя происходит это иначе. Если бы плазменная волна была стационарной, им пришлось бы двигаться в периодическом потенциальном поле, и в среднем никакого обмена энергией быть не могло. Но если волна затухает (скажем, из-за взаимодействия с захваченными частицами), картина меняется. Грубо говоря, дело в том, что теперь каждый пролетный электрон «карабкается на более высокую горку, чем та, с которой он потом съезжает», потому что эта «горка» становится ниже по мере затухания волны. Не задерживаясь на деталях, ограничимся формулировкой результата: для синусоидальной ленгмюровской волны конечной амплитуды при начальной функции распределения, близкой к равновесной, вклады в затухание пролетных и захваченных электронов оказываются буквенно одинаковыми и близкими по порядку величины.

Эту задачу (для синусоидальной волны) часто называют задачей О'Нила. Одновременно с О'Нилом (1965 г.) очень похожие результаты опубликовал Р. Мазитов, но не для синусоидального профиля, а для периодической прямоугольной структуры. Это была упрощенная модель, хотя нечто в подобном роде может получиться при нелинейном укручении волны. Интересно отметить, что в случае Мазитова вклад в затухание давали только захваченные частицы.

Следующее замечание касается так называемых БГК-волн (Бернштейн, Грин, Крускал, 1957 г.). Даже в задаче О'Нила при условии, обратном (3.6), конечным результатом должна быть самосогласованная система, состоящая из стационарной волны и модифицированного

распределения захваченных частиц. В принципе, такой результат не обязательно следует только из эволюции, которая обсуждалась выше. Можно даже представить себе стационарную волну совсем без захваченных частиц или, напротив, волну, «перегруженную» такими частицами (модулированный пучок), и т. д. Такие самосогласованные системы волн и частиц, представленные в виде точных решений, и есть волны БГК.

Эффекты захвата часто обсуждаются в связи с интерпретацией экспериментальных данных, особенно если таковая базируется на одномерных численных моделях. Полезно, однако, заметить, что влияние этих эффектов в большей степени характерно для одномерных моделей, нежели для трехмерной реальной физики. В трехмерной системе, как правило, потенциальные максимумы и минимумы тоже трехмерны. Но отсюда следует, что лишь очень малая доля резонансных частиц будет действительно заперта в некоторой окрестности минимумов. Конечно, остается некоторый эффект непрямолинейности траекторий резонансных частиц, но он явно будет не столь важен; приходится, правда, признать, что корректно учитывать его в трехмерном случае мы не умеем. Иное дело, если рассматривается кинетика плазмы во внешнем магнитном поле — здесь эффекты захвата действительно важны, и теоретики умеют правильно с ними обращаться.

Заслуживают внимания также и волны Ван Кампена или, как их иногда называют, баллистические моды. Когда Власов работал с уравнением (2.25), он предложил брать входящий в него интеграл в смысле главного значения, тем самым ограничившись первым членом в (2.29). Подход Ландау, казалось бы, дезавуировал это решение, но решения БГК для волн конечной амплитуды дают основания еще раз к нему вернуться. Вообще говоря, (2.23) не является полным решением уравнения (2.21). Его можно дополнить еще одним членом, удовлетворяющим единственному условию: быть равным нулю везде, кроме точки резонанса. Перепишем наше общее решение:

$$f_{\mathbf{k}} = \left[P \left(\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \right) + \mu \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right] \frac{e\mathbf{k}}{m} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \cdot \Phi_{\mathbf{k}}, \quad (3.8)$$

где μ — произвольная комплексная величина. Рассмотрение Ландау дает $\mu = -\pi i$. Полученные решения можно трактовать как собственные функции задачи; в максвелловской плазме они могут существовать так долго, как позволит декремент затухания (2.28). Любое начальное возмущение f или \mathbf{E} может быть разложено в ряд по собственным функциям, и дальше его эволюция совершенно определена. Решение Власова соответствует $\mu = 0$. Оно может быть реализовано только в сочетании со специально сконструированным плато в узкой области пространства скоростей (см. (3.3)). (Строго говоря, сам Власов этот вопрос не обсуждал.)

Ван Кампен (1955 г.) предложил включить в рассмотрение целое семейство функций:

$$f_{\mathbf{k}\lambda} = \frac{e}{m} \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} P\left(\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}\right) \varphi_{\mathbf{k}} + \lambda \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \varphi_{\mathbf{k}}, \quad (3.9)$$

где λ — параметр решения. Вообще говоря, каждая из этих функций, кроме одной — с $\lambda = -\pi i(e/m)(\mathbf{k} \partial f_0 / \partial \mathbf{v})$ (это решение Ландау), — конструируется как плазменная волна в комбинации с модулированным пучком частиц. Подстановка (3.9) в уравнение Пуассона приводит к дисперсионному уравнению

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}}\right) \frac{\partial f}{\partial v} dv + \frac{4\pi n e \lambda}{k^2} |k| = 0. \quad (3.10)$$

Это уравнение включает две неизвестные величины, ω и λ , так что его результатом не может быть однозначная связь $\omega(k)$. Скорее получается зависимость $\lambda(\mathbf{k}, \omega)$. Это означает, что функция $\omega(k)$ может быть любой, если только сопутствующий пучок правильно подобран. Ван Кампен доказал, что система функций (3.9) полна, т. е. произвольное начальное возмущение можно разлагать и по волнам Ван Кампена. Но если сравнивать их с собственными функциями, они гораздо менее удобны, главным образом, из-за теплового расплывания во времени. По этой причине баллистические моды привлекаются к рассмотрению достаточно редко и остаются в физике плазмы как бы неким курьезом.

Читатели, которых тематика данной главы заинтересовала, могут дополнить ее обзором (1968 г.) или книгой (1988 г.) Б. Б. Кадомцева, который внес в эти вопросы должную ясность. В какой-то мере может быть полезна также книга Т. Стикса (1967 г.), по которой лучше всегознакомиться со взглядом на проблему американской школы теоретиков.

Квазилинейная теория. Приближение случайных фаз. Резонансное взаимодействие «волна-частица» для ленгмюровских волн и ионного звука

В этой главе рассмотрим проблему самосогласованной эволюции волн и частиц вследствие черенковского взаимодействия. При постановке задачи придется выбирать одну из двух возможностей. Режим волновой динамики может быть одномодовым либо многомодовым. Первый из них рассматривался в гл. 3 и более типичен для одномерной теории (особенно численных моделей) гидродинамической пучковой неустойчивости, распространения в ионосфере мощных зондирующих сигналов, для микродинамики замагниченной плазмы и т.п. В этом режиме эффект захвата (или его трехмерное обобщение) должен играть принципиально важную роль. Напротив, в многомодовом режиме, типичном для нелинейной динамики различных кинетических неустойчивостей, регулярное движение резонансных частиц, как правило, никакой роли не играет. Эффект захвата оказывается подавлен эффектами интерференции волн.

Особенно популярны две идеализированные модели — нелинейная квазимонохроматическая волна и приближение случайных фаз. Примерное представление о них можно получить, сравнивая свет лазера и некогерентное излучение обычной электрической лампы. В данной и нескольких последующих главах мы отдадим предпочтение многомодовому волновому режиму в приближении случайных фаз. Дело в том, что мы собираемся изучать плазменную турбулентность. Для горячей бесстолкновительной плазмы практически всегда характерен существенно надтепловой уровень возбуждения многих коллективных степеней свободы — можно сказать, что турбулентность является формой ее существования, так что и приближение случайных фаз для многих (но не всех) проблем оказывается достаточно естественным. Пока и поскольку мы рассматриваем плазменные волны как прямой результат кинетических неустойчивостей, это является хорошим приближением.

Подойдем к нему формально. Условие некогерентности или, что то же, случайности фаз, запишем в виде

$$\langle \tilde{E}_{\mathbf{k}\omega} \tilde{E}_{\mathbf{k}'\omega'}^* \rangle = \varepsilon_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}), \quad (4.1)$$

где $\tilde{E}_{\mathbf{k}\omega} \sim \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$; E^* означает комплексно сопряженную величину.

С таким определением мы немного отходим от работ основатель — Веденова и др. (1962 г.), Драммонда и Пайнса (1962 г.). В этих работах впервые была сформулирована самосогласованная теория черенковского взаимодействия волн и частиц, получившая название квазилинейной теории. Наши результаты будут тождественны результатам классиков, но сам вывод будет дан на современном уровне понимания, с переходом в последующих главах к процессам высших порядков.

Приближение (4.1) используется не только в физике плазмы, но и в физике твердого тела, для описания турбулентности волн на воде и т.д. Оно означает, что в турбулентном состоянии возможны только парные корреляции; все более высокие корреляции должны расщепиться на парные. Очевидна аналогия: некогерентное световое поле полностью описывается заданием спектральной интенсивности. Такая δ -корреляция, в частности, означает, что линия $\omega(\mathbf{k})$ не может быть слишком широкой, так что соотношение $A_{\mathbf{k}\omega} \cong A_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$ должно иметь место для фурье-компоненты произвольной функции A . Поэтому корреляция любого произведения двойных фурье-компонент также должна быть функцией только \mathbf{k} . В этом отношении ситуация не очень далека от линейного предела и, как правило, мы будем игнорировать вещественную часть нелинейного сдвига частоты волн, принимая закон дисперсии в линейной форме $\omega_{\mathbf{k}}$. Далее, корреляция подразумевает некоторое усреднение во времени. Интервал усреднения $\Delta t \gg 1/\omega$, но много меньше любого другого временного масштаба задачи. Наконец, если бы мы имели дело, скажем, с поперечными волнами или геликонами, правая часть (4.1) содержала бы также фактор $(\mathbf{e}\mathbf{e}')$, т.е. скалярное произведение векторов поляризации.

Упростим (4.1). Во-первых, ограничимся рассмотрением потенциальных волн:

$$\tilde{E}_{\mathbf{k}\omega} = -ik\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}\omega}. \quad (4.2)$$

Во-вторых, разложим осциллирующее поле в ряд по собственным функциям: $\tilde{\varphi}_{\mathbf{k}\omega} = \varphi_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}})$. Одна из двух δ -функций в (4.1) может быть просто сокращена, другая — ликвидирована одновременным интегрированием правой и левой частей по ω' :

$$\begin{aligned} \text{левая часть: } & \int d\omega' \dots \delta(\omega' - \omega_{\mathbf{k}'}), \\ \text{правая часть: } & \int d\omega' \dots \delta(\omega' - \omega). \end{aligned} \quad (4.3)$$

В-третьих, учтем, что все наблюдаемые физические величины вещественны, а значит, для произвольной осциллирующей функции получаем

$$A \sim = \sum_{\mathbf{k}} A_{\mathbf{k}} \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \quad A_{\mathbf{k}}^* = A_{-\mathbf{k}}. \quad (4.4)$$

Теперь уже нетрудно собрать уравнения (4.1)–(4.4) в одно:

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}'} \rangle = I_{\mathbf{k}} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (4.5)$$

Интенсивность $I_{\mathbf{k}}$ должна удовлетворять известному соотношению для плотности энергии потенциальных волн:

$$W_{\mathbf{k}} = \frac{1}{8\pi} \frac{\partial(\epsilon\omega)}{\partial\omega} \langle E^2 \rangle_{(\mathbf{k})} = \frac{k^2}{4\pi} I_{\mathbf{k}}. \quad (4.6)$$

Если наши волны некогерентны и волновая интерференция препятствует эффекту захвата, линейные уравнения, описывающие затухание Ландау, сохраняют силу:

$$\frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \gamma_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}, \quad \frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}} W_{\mathbf{k}}, \quad \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}} I_{\mathbf{k}}, \quad (4.7)$$

$$\gamma_{\mathbf{k}} = \frac{\pi}{2} \frac{\omega^3}{k^2} \int \frac{\mathbf{k} \partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \delta(\tilde{\omega}) d\mathbf{v}. \quad (4.8)$$

В (4.8) мы ограничились частным результатом для ленгмюровских волн. Теперь, однако, электронное распределение f_0 — уже не стационарная функция. Она не может остаться таковой хотя бы потому, что частицы должны обеспечить самосогласованным образом источник или сток энергии при неустойчивости и затухании волн соответственно. Получим уравнение для эволюции спектра частиц.

В случае ленгмюровских волн ионы можно считать неподвижными (см. (2.23)) с точностью порядка m/M . Как и в гл. 2, мы работаем в бесстолкновительном пределе. Представим электронную функцию распределения в виде суммы двух слагаемых: осциллирующего $f \sim = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} \exp i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, где $f_{\mathbf{k}}$ определяется из (2.23), и слагаемого $f_0 = \langle f \rangle_t$, для которого время усреднения много больше плазменного периода $2\pi/\omega_{pe}$. Соответственно будем искать амплитуду волны в виде медленно меняющегося во времени предэкспоненциального фактора, для которого воспользуемся уравнением (4.8). (По идее это близко методу Ван-дер-Поля или Крылова–Боголюбова.) Осциллирующую часть уравнения Власова мы уже выписывали в гл. 2; добавим к ней усредненное уравнение

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f_0 = -\frac{e}{m} \langle \nabla \varphi \frac{\partial f \sim}{\partial \mathbf{v}} \rangle. \quad (4.9)$$

Правая часть (4.9) записана с учетом того, что $\langle \nabla \varphi \partial f_0 / \partial \mathbf{v} \rangle = 0$, поскольку φ состоит из ряда осциллирующих гармоник. Эту часть можно преобразовать в ряд по парным корреляциям:

$$\nabla \varphi = i \int d\mathbf{k}' k' \varphi_{\mathbf{k}'}, \quad \varphi_{\mathbf{k}'} = \varphi_{\mathbf{k}'} \exp i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega_{\mathbf{k}'}t), \quad (4.10)$$

$$f \sim = \frac{e}{m} \int d\mathbf{k} \frac{\mathbf{k} \partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \varphi_{\mathbf{k}}, \quad (4.11)$$

$$\langle \nabla \varphi \frac{\partial f \sim}{\partial \mathbf{v}} \rangle = i \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left\langle \int d\mathbf{k}' k'_\alpha \varphi_{\mathbf{k}'} \int d\mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}} \tilde{\omega}^{-1} k_\beta \frac{\partial f_0}{\partial v_\beta} \right\rangle, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f_0 = -i \left(\frac{e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \int d\mathbf{k}' d\mathbf{k} \tilde{\omega}^{-1} k'_\alpha k_\beta \langle \varphi_{\mathbf{k}} \tilde{\varphi}_{\mathbf{k}'} \rangle \frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}. \quad (4.13)$$

В правой части (4.13) использовано (4.5), что позволяет снять одно интегрирование. Если, к тому же, принять во внимание уравнение (2.29), эта часть оказывается комплексной величиной. Здесь важно разделять два эффекта. Мнимое слагаемое, обусловленное $P(\tilde{\omega}^{-1})$, соответствует некоторому нелинейному сдвигу частоты или, что то же, перенормировке зависимости $\omega(\mathbf{k})$. Мы уже оговорили выше эту возможность. То, что нам действительно интересно, — эволюция спектра частиц во времени — представлено действительной частью уравнения и, следовательно, вычетом подынтегрального выражения $\pi i \delta(\tilde{\omega})$. В итоге получаем уравнение диффузионного типа (диффузия — в пространстве скоростей):

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f_0 = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}, \quad (4.14)$$

$$D_{\alpha\beta} = \pi \left(\frac{e}{m} \right)^2 \int d\mathbf{k} k_\alpha k_\beta I_{\mathbf{k}} \delta(\tilde{\omega}). \quad (4.15)$$

Положим для простоты $\nabla n = 0$. Отметим еще раз то обстоятельство, что, стартуя с бесстолкновительной системы уравнений Власова, мы пришли к согласованной паре уравнений диссипативной природы:

$$\frac{\partial W_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \pi \frac{\omega^3}{k^2} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) W_{\mathbf{k}}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \left(\frac{2\pi e}{m} \right)^2 \int d\mathbf{k} \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \frac{\partial f_0}{\partial v_\beta}. \quad (4.17)$$

Физическая причина необратимости обсуждалась в гл. 3. Здесь она формально вводится условиями (4.5) или (4.1). Случайность фаз подразумевает некий механизм «забывания», т. е. роста энтропии. Итак, бесстолкновительное затухание (или обратный процесс — двухпоточковая неустойчивость) сопровождается диффузией частиц в простран-

стве скоростей. Следствием ее является нагрев частиц $\partial\langle v^2\rangle/\partial t > 0$ и еще так называемый стохастический нагрев $\partial(\langle v^2 - \langle v^2 \rangle^2)/\partial t > 0$, а также ряд эффектов, которые мы рассмотрим ниже. Разумеется, в самосогласованной теории затухание не может быть экспоненциальным, а диффузия не может быть линейной вследствие конечного запаса энергии как в поле, так и в частицах.

Ряд особенностей уравнений (4.16), (4.17) заслуживает внимания. Оба они на первый взгляд выглядят линейными, но только пока система не замкнута. Вместе же они описывают некоторую нелинейную эволюцию. По этой причине такая модель и называется квазилинейной. Она отражает взаимодействие не любых частиц и шумов плазмы, но лишь связанных условием черенковского резонанса $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = 0$. Для данной моды $\omega(\mathbf{k})$ лишь те электроны вовлечены во взаимодействие, у которых $v \geq \omega/k$. То же неравенство определяет волны, взаимодействующие с частицами данной скорости v . В частности, взаимодействие с длинноволновыми ленгмюровскими шумами, а равно и поперечными волнами в плазме, у которых $\omega/k > c$, запрещено для любых частиц. Если $\omega/k \gg v_{Te}$, как предполагалось в гл. 2, взаимодействовать сможет лишь малая доля частиц — резонансный «хвост» функции распределения.

Иерархическая конструкция, включающая все нелинейные процессы, но лишь для одной моды (хотя бы и столь фундаментальной, как ленгмюровские волны), едва ли может нас удовлетворить. Но, с другой стороны, устрашающее многообразие волновых мод, характерное для физики плазмы, не дает возможности для сколько-нибудь полных обобщений. Попробуем, по крайней мере, дополнить наше рассмотрение еще одной ветвью плазменных волн, столь же простой и, в сущности, столь же фундаментальной, хотя и менее известной неплазμισтам. Речь пойдет об ионном звуке. Получить его можно из того же уравнения (2.14). Если в приближении $\omega/k \gg v_{Te}$ ионный вклад несуществен, все сводится к цепочке (2.16)–(2.18), а в результате получается ленгмюровская волна. В пределе очень малых фазовых скоростей, $\omega/k \ll v_{Ti}$, ω вообще исчезает из уравнения, значит таких волн быть не может. Рассмотрим промежуточный случай: $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$. Тогда в (2.14) важны оба вклада, как электронный, так и ионный. Пусть компоненты плазмы как целое покоятся: $\mathbf{v}_i = 0$, $\mathbf{v}_e = 0$; тогда дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 + 1/(\gamma_e k^2 r_{De}^2) - \omega_{pi}^2/\omega^2 = 0.$$

Можно переписать его в явной форме для $\omega(\mathbf{k})$:

$$\omega = \omega_{pi} [1 + (\gamma_e k^2 r_{De}^2)^{-1}]^{-1/2}. \quad (4.18)$$

Коэффициент γ_e еще предстоит определить. Что касается γ_i , то очевидно, $\gamma_i = 3$, как и для ленгмюровских волн, и это подтверждается кинетическим рассмотрением. Легко видеть, что функция ω , следующая из (4.18), всегда меньше ω_{pi} ; более того, в длинноволновом пределе $k \ll r_{De}^{-1}$ она много меньше ω_{pi} . Тем самым $\omega \ll \omega_{pe}$ в любом случае. Это значит, что «с точки зрения электронов» эти волны являются низкочастотными и колебательное движение — очень медленным. Тепловой обмен внутри электронного компонента идет быстрее, $\tau \approx 1/\omega_{pe}$, так что наиболее естественным представляется изотермическое приближение, т. е. $\gamma_e = 1$. Кинетика подтверждает и этот вывод. Вообще говоря, это значит, что дисперсию ионного звука легко найти прямо из уравнений (2.7)–(2.9), если с самого начала учесть эти особенности ионного звука:

$$M \frac{dv_i}{dt} = -e \nabla \varphi, \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div } n_i \mathbf{v}_i = 0, \quad (4.20)$$

$$n_e = n \exp \frac{e\varphi}{T_e}, \quad (4.21)$$

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi e(n_e - n_i). \quad (4.22)$$

Обсудим две особенности уравнений (4.19)–(4.22). Во-первых, мы пренебрегли температурой ионов T_i в (4.19). Это сделано в согласии с неравенством $\omega/k \gg v_{Ti}$. Аналогичное приближение для (2.16), $T_e \approx 0$, привело бы нас просто к (2.6). Это значит, что, пренебрегая электронным давлением для ленгмюровских колебаний, мы пренебрегаем дисперсией. Здесь же мы можем пренебречь ионным давлением, поскольку электронное оказывается более важным. Дополнительные аргументы дает кинетический подход (см. ниже).

Далее, мы взяли уравнение Больцмана (4.21) вместо двух более точных электронных уравнений — непрерывности и уравнения Эйлера. Это можно сделать, потому что движение электронов в данной волне медленное с $\gamma_e = 1$. Конечно, при этом мы имеем в виду также и $\mathbf{v}_e = 0$. Система уравнений (4.19)–(4.22) особенно удобна для численного моделирования медленных мелкомасштабных процессов в бесстолкновительной плазме. Убедитесь самостоятельно, что она приведет к уже известному нам результату. Последний может быть представлен в одной из двух эквивалентных форм:

$$\omega = \omega_{pi} / [1 + (kr_{De})^{-2}]^{1/2}, \quad (4.23)$$

$$\omega = kc_s / [1 + (kr_{De})^2]^{1/2}, \quad (4.24)$$

где

$$c_s = (T_e/M)^{1/2}. \quad (4.25)$$

Законом дисперсии (4.23) более удобно пользоваться в высокочастотном или коротковолновом пределе $k > r_{De}^{-1}$, $\omega \approx \omega_{pi}$ (ионные плазменные колебания), тогда как (4.24), напротив, выглядит более естественным и наглядным в обратном случае (ионный звук, $k < r_{De}^{-1}$, $\omega \cong kc_s$). Оба предела видны на рис. 4.1, где показан также и закон дисперсии ленгмюровских волн. Для удобства $\omega_{pe, i}$ и $r_{De, i}$ даны в про-

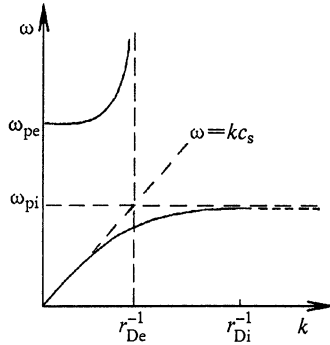


Рис. 4.1. Качественная картина дисперсионных кривых для ленгмюровских волн и ионного звука

извольных единицах. Легко видеть, что $\omega/k < c_s$ в любом предельном случае. А поскольку ионный звук — нечто вроде ионных ленгмюровских волн, естественно ожидать, что $\gamma_k \approx -\omega$ при стремлении фазовой скорости ω/k к ионной тепловой скорости v_{Ti} . Таким образом, окно параметров для существования этой моды не пусто, если $c_s \gg v_{Ti}$ или, окончательно,

$$T_e \gg T_i. \quad (4.26)$$

Иногда пишут $T_e \gg 3T_i$, но это, строго говоря, превышение точности. Даже если выполнено условие (4.26), затухание Ландау на ионах все же надо учитывать для коротких длин волн, $k \rightarrow r_{De}^{-1}$.

Кинетическое описание ионного звука и его затухания следует из очевидного обобщения уравнения (2.25):

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{k}\right)^2 \int \mathbf{k} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \tilde{\omega}^{-1} d\mathbf{v} + \\ + \left(\frac{\omega_{pi}}{k}\right)^2 \int \mathbf{k} \frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}} \tilde{\omega}^{-1} d\mathbf{v} = 0. \quad (4.27) \end{aligned}$$

Линейный закон дисперсии, следующий из (4.27), совпадает с (4.18) при $\gamma_e = 1$ (и $\gamma_i = 3$). (Должно быть, это последний случай в настоящей книге, когда показатели политропы $\gamma_{e,i}$ можно спутать с инкрементом γ_k ; проявите, пожалуйста, осторожность.)

Затухание Ландау ионного звука вследствие черенковского взаимодействия с ионами может быть описано почти теми же словами и очень близко формально к затуханию на электронах ленгмюровских волн. Соответственно ответ для $\gamma_k^{(i)}$ совпадает с правой частью (2.30) при $f_0 \Rightarrow f_i$. Иначе обстоит дело с затуханием Ландау ионного звука на электронах. Скорость звука c_s , следующая из (4.25), много меньше v_{Te} , а значит, почти все электроны одновременно оказываются резонансными для ионно-звуковой волны. И все же соответствующее затухание достаточно мало, $\gamma_e \ll \omega$, хотя эта малость — не экспоненциального характера. Причина состоит как раз в малости фазовой скорости ω/k . Будучи спроектирована на электронную скорость, она соответствует «вершине» или, как иногда говорят, «колоколу» функции распределения электронов $f(v_{\parallel})$ (ср. с рис. 2.3 и рис. 3.2), где производная $\partial f / \partial v_{\parallel}$ мала, хотя сама f отнюдь не мала. Подтвердим наши рассуждения вычислениями:

$$\gamma_e = -\text{Im} \varepsilon^{(e)} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right)^{-1}, \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \cong \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega^3}, \quad (4.29)$$

$$\text{Im} \varepsilon^{(e)} = \pi \left(\frac{\omega_{pe}}{k} \right)^2 \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (4.30)$$

И, наконец, результат:

$$\gamma_k^{(e)} = \frac{\pi \omega^3}{2k^2} \frac{M}{m} \int d\mathbf{v} \mathbf{k} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (4.31)$$

Для любой сферически-симметричной (в частности, и максвелловской) функции f_e он может быть упрощен подобно (2.31):

$$\gamma = -\pi^2 \omega \frac{M}{m} \left(\frac{\omega}{k} \right)^3 f_e(\omega/k).$$

Если и в самом деле взять функцию распределения максвелловской или близкой к ней, можно с учетом малости ω/k грубо оценить $f_e(\omega/k) \cong v_{Te}^{-3} (2\pi)^{-3/2}$, откуда следует

$$\gamma = -\left(\frac{\pi}{8} \right)^{1/2} \omega \left(\frac{\omega}{k v_{Te}} \right)^3 \frac{M}{m} \leq \omega \left(\frac{\pi m}{8M} \right)^{1/2}. \quad (4.32)$$

Качественный результат в данном случае, конечно, не зависит от того, сколь близка выбранная нами функция к равновесной. В плазме с (почти) максвелловскими электронами можно, таким образом, оценить длину свободного пробега ионно-акустического кванта (плазмона) вследствие электронного затухания Ландау: $\lambda(M/m)^{1/2}$, где λ — длина волны. Ниже мы не раз воспользуемся этой оценкой.

Может быть построена и квазилинейная теория, описывающая взаимодействие звука с резонансными ионами, причем даже уравнения оказываются теми же самыми (см. (4.16), (4.17)), только под f_0 нужно понимать f_i , а m в (4.17) заменить на M . Кроме того, квазилинейное взаимодействие звуковых шумов с электронами тоже следует принять во внимание, особенно при наличии пучков или тока в плазме. Из того же неравенства $\omega/k \ll v_{Te}$ следует, что условие черенковского резонанса $\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$ для большинства электронов может использоваться в редуцированной форме $\mathbf{k}\mathbf{v} = 0$. Таким образом, эффективным оказывается взаимодействие электрона и акустического плазмона с ортогональными импульсами. (Мы избегаем именовать ионно-звуковой квант фононом; последний обычно принято связывать с колебаниями решетки.) Черенковское взаимодействие при ортогональных импульсах есть не что иное, как упругое рассеяние электрона, лишь меняющего направление скорости, на «тяжелом» ионно-звуковом кванте. Это позволяет удобным образом преобразовать уравнение диффузии электронов в пространстве скоростей. Возьмем его в аксиально-симметричной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{v^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \left(d_{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta} - d_{\theta v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) + v^{-2} \frac{\partial}{\partial v} \left(d_{vv} \frac{\partial f}{\partial v} - d_{\theta v} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right), \quad (4.33)$$

$$d_{vv} = \frac{\omega_{pe}^2}{nm} \int d\mathbf{k} \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 \mathbf{W}_k \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (4.34)$$

$$d_{\theta v} = \frac{\omega_{pe}^2}{nm} \int d\mathbf{k} \frac{\omega \cos \theta}{k \sin \theta} \mathbf{W}_k \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (4.35)$$

$$d_{\theta\theta} = \frac{\omega_{pe}^2}{nm} \int d\mathbf{k} \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 \mathbf{W}_k \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (4.36)$$

где $f = f^e$, $\theta = \angle \mathbf{v} \mathbf{e}_z$, $\theta = \angle \mathbf{k} \mathbf{e}_z$; Oz — ось симметрии. Интересно отметить иерархию коэффициентов в диффузионном уравнении (4.33), которая определяется тем же малым параметром ω/kv_{Te} :

$$d_{vv} \approx \frac{\omega}{k} d_{\theta v} \approx \left(\frac{\omega}{k} \right)^2 d_{\theta\theta},$$

так что из (4.33) вытекает преимущественная роль чисто углового рассеяния с эффективной частотой столкновений

$$d_{\theta 0} \cong \pi \omega_{\text{pe}}^2 \int \frac{W_{\mathbf{k}}}{nmv^2} \delta(\mathbf{k}\mathbf{v}) d\mathbf{k} \sim v^{-3}. \quad (4.37)$$

Ситуация очень напоминает таковую в лоренцевой плазме (с бесконечно тяжелыми ионами); это впервые было замечено Рудаковым и Кораблевым (1966 г.), которые рассматривали ионно-звуковую неустойчивость тока в квазилинейном приближении.

До сих пор нами рассматривалась исключительно однородная плазма. Давайте теперь введем в рассмотрение неоднородность, достаточно слабую, чтобы в нулевом приближении пользоваться ординарной линейной теорией, — зависимость $\omega(\mathbf{k})$ останется прежней. Как правило, в немагнитической плазме неоднородность концентрации приводит к более сильным эффектам, нежели неоднородность температуры. Для простоты рассмотрим именно этот случай, хотя обобщение проблемы не составит труда.

Начнем с обобщения квазилинейных уравнений. Как известно, аналитическое описание эффекта неоднородности среды возможно в двух противоположных предельных случаях: дифракционном приближении и геометрической оптике, или квазиклассическом пределе. Первый из них типичен скорее для волноводов, макроскопических возмущений плазменного столба и т.п., но едва ли для турбулентной кинетики. Второй как раз для кинетических задач часто оказывается наиболее адекватным. Как известно из оптики, условие такого приближения $k\alpha \gg 1$ или $\alpha \gg \lambda$, где α — характерный пространственный масштаб.

Начнем с уравнений волновой динамики в этом пределе. Первое из них общеизвестно — это уравнение эволюции во времени средней координаты волнового пакета:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} = \mathbf{v}_{\text{gr}} = \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}}. \quad (4.38)$$

Второе немедленно может быть к нему добавлено, если мы внимательно посмотрим на уравнения Гамильтона (1.11). Сделаем в них замену $\mathbf{p} \Rightarrow \mathbf{k}$, $H \Rightarrow \omega$ ($\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r}$). Получаем

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{r}} = -\nabla \omega. \quad (4.39)$$

Вместе уравнения (4.38), (4.39) сразу дают $\omega = \text{const}$. Это типичное свойство решения стационарной волновой задачи. В таких условиях может изменяться длина волны, но не частота (скажем, цвет в оптике). И только нестационарность в линейной системе может менять частоту (например, вследствие эффекта Доплера). Возможна и другая интерпретация уравнений (4.38), (4.39) как уравнений движения единственного кванта (квазичастицы). Траектория волнового пакета

определяется из решения этой пары канонически сопряженных уравнений. Очень часто ее непосредственно можно найти из условия $\omega = \text{const}$. В предположении $T_e \cong \text{const}$, $n \neq \text{const}$ нетрудно получить для ленгмюровских волн из (2.17):

$$3k^2 + r_{De}^{-2} = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\delta k}{k} \cong - \frac{\delta n}{n(kr_{De})^2}. \quad (4.40)$$

Равным образом и звуковые волны можно рассматривать на базе уравнения (4.24):

$$k^{-2} + r_{De}^2 = \text{const}. \quad (4.41)$$

Уравнения (4.40) или (4.41) нужно еще дополнить очевидным следствием уравнения (4.39):

$$\delta \mathbf{k} \parallel \partial \mathbf{k} / \partial t = -\nabla \omega \parallel -\nabla n. \quad (4.42)$$

Мы уже несколько раз воспользовались термином «квазичастица». Это понятие особенно широко используется в физике конденсированных сред. Не менее полезным оказывается оно и в физике плазменной турбулентности. Здесь, однако, не лишне будет отметить ряд специфических особенностей. Во-первых, в рамках совершенно классических уравнений (2.1)–(2.3), притом без учета флуктуаций, в нашей модели не может быть каких-либо квантовых проявлений, а значит, \hbar в конечный результат входить не должно. По той же причине нам не следует оперировать с отдельными квантами, но лишь с их статистическими ансамблями, которые должны быть представлены некоторыми функциями распределения плазмонов (ленгмюровских, ионно-звуковых и т.д.). Более привычным эквивалентным понятием является спектральная интенсивность:

$$N_{\mathbf{k}} = W_{\mathbf{k}} / \omega_{\mathbf{k}}, \quad (4.43)$$

$$W = \int N_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}, \quad \mathbf{P} = \int N_{\mathbf{k}} \mathbf{k} d\mathbf{k},$$

где \mathbf{k} и ω можно рассматривать как импульс и энергию плазмона. Их размерность, правда, отличается от стандартной, поскольку \hbar опущено в этих формулах.

Обобщение (4.8) или (4.16) удобно ввести в форме уравнения Лиувилля

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial \mathbf{k}} \nabla N_{\mathbf{k}} - \nabla \omega \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial \mathbf{k}} = 2\gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}. \quad (4.44)$$

Интегрирование (4.44) по характеристикам дает нам уже известные уравнения (4.38), (4.39) и еще одно, очень важное:

$$N(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = N(\mathbf{k}_0, \mathbf{r}_0) \exp \int_{(\mathbf{k}_0, \mathbf{r}_0)}^{(\mathbf{k}, \mathbf{r})} \frac{2\gamma_{\mathbf{k}}}{|\partial \omega / \partial \mathbf{k}|} d\mathbf{l}. \quad (4.45)$$

Точки в фазовом пространстве (\mathbf{k}, \mathbf{r}) и $(\mathbf{k}_0, \mathbf{r}_0)$ должны принадлежать одной и той же фазовой траектории, а интегрирование в правой части (4.45) проводится вдоль фазовой траектории плазмона.

Одномерная квазилинейная теория.

Временная и пространственная постановка задачи.

Неустойчивость пучка в плазме

В этой главе мы познакомимся с наиболее, быть может, популярными результатами квазилинейной теории. По крайней мере, не существует более наглядных и столь же четко сформулированных следствий данной концепции. Обратимся к одномерной квазилинейной модели. Начнем с вопроса, в каком смысле можно считать ее одномерной. В самом деле, главный одномерный эффект — эффект захвата — не отражен в квазилинейных уравнениях (4.16), (4.17). Известны, правда, эклектические модели, но едва ли они стоят внимания. Так что в этом отношении одномерная квазилинейная теория остается близкой к трехмерной. Чтобы оправдать ее результаты, обычно подчеркивается многомодовый и некогерентный характер квазилинейного режима. Они и правда могут служить аргументом в пренебрежении эффекта захвата. Некоторые «следы» захвата обнаруживаются и в этом случае, в частности явление «эха». Но в большинстве случаев они заметной роли не играют. В конце концов, желая получить конкретный результат, физик всегда должен чем-то пренебречь.

Существует, как обычно, и проблема применимости результатов одномерной теории. В принципе, адекватные условия могут быть организованы искусственно со специальной целью проверки теории. Не столь очевидна применимость одномерной квазилинейной теории в общем случае лабораторной или космической плазмы. Иногда утверждается, что одномерная ситуация реализуется при очень больших (даже бесконечных) внешних магнитных полях, но пользоваться подобными аргументами нужно с большой осторожностью. Сильное магнитное поле обеспечит одномерность движения электронов, очень сильное — ионов, но никогда — волн. К тому же, закон дисперсии будет модифицирован по сравнению с (2.14); соответственно одномерным становится уравнение (4.17), но не (4.16), и W_k не сводится к W_k .

Конечно, можно смотреть на упрощенную модель как на полезный первый шаг, дающий аргументы для дискуссий относительно более сложных сценариев. С этой точки зрения не следует оправдываться заранее, рассматривая одномерную модель, но в дальнейшем нужно с особым пристрастием отнестись к тем случаям, когда предсказания этой теории неверны. В конечном счете эксперимент обнаруживает некоторые элементы соответствия одномерных результатов с физической реальностью, даже безотносительно к приведенным выше аргументам.

Наиболее удобный для нас пример — неустойчивость пучка в плазме. Рассмотрим временную задачу, взяв электронное распределение, показанное на рис. 2.3, в качестве начального условия. Энергию шумов плазмы положим в начальный момент равной нулю. Посмотрим на уравнения (4.16), (4.17). Очевидно, ничего не может произойти в рамках этой системы уравнений, если $W_k \equiv 0$. И даже когда $W_k \neq 0$, ничто не случается *слишком быстро*. Совместная эволюция частиц и шумов занимает интервал времени не меньше, чем γ^{-1} , где γ — инкремент, оцененный, скажем, из (2.38). Для более коротких временных масштабов мы можем пренебречь эволюцией W_k или N_k , а значит — и распределения частиц. В пространственной задаче, выбрав условие инжекции пучка (рис. 2.3) в качестве граничного, эту оценку можно преобразовать в минимальную длину пробега пучка, когда он заведомо не релаксирует: $\gamma^{-1} |\partial\omega/\partial k|$. Но это еще не все. Нужно разобраться, что все же имеется в виду под равенством $W = 0$. Если бы такое состояние было возможно без оговорок, ни одна плазменная неустойчивость не смогла бы развиваться в силу экспоненциального характера. Но, как показывает опыт, неустойчивость, которая должна развиваться, развивается. К тому же, условие $W = 0$ противоречит основам термодинамики, поскольку означает «пустую» степень свободы. Даже совершенно спокойная плазма, пребывающая в термодинамическом равновесии, должна слегка «шуметь». Оценим, к примеру, равновесный уровень ленгмюровских шумов. Плотность степеней свободы в фазовом пространстве может быть записана в дифференциальной форме $d\Pi = dk dr (2\pi)^{-3}$, соответственно их плотность в x -пространстве имеет вид

$$d\Pi/dV = (2\pi)^{-3} \int dk = k_{\max}^3/6\pi^2. \quad (5.1)$$

Величина k_{\max} может быть оценена как r_{De}^{-1} с достаточной для нас точностью. Энергия на одну колебательную степень свободы равна T , и в итоге получаем следующую оценку для плотности равновесных тепловых шумов:

$$W_{th} \approx T/(6\pi^2 r_{De}^3) \approx nT/N_D. \quad (5.2)$$

В типичных условиях космической или термоядерной плазмы $N_D \gg 1$, поэтому энергия W_{th} много меньше тепловой (а неидеаль-

ная плазма в нашей книге не рассматривается). Чтобы корректно включить в рассмотрение этот тепловой шум, мало одной системы Власова или больцмановской кинетики, поскольку они не содержат флуктуационных членов. Уравнения (4.16), (4.17) выводились в неявном предположении $W \gg W_{th}$ или $W_k \gg W_{k(th)}$. Это неравенство обычно с хорошим запасом выполняется в реальной плазме — как правило, разряд или инжектор создает плазму, весьма далекую от теплового равновесия. Учет же одновременно тепловых и существенно надтепловых шумов потребовал бы чрезмерно сложной техники. А посему ограничимся и в дальнейшем надтепловыми шумами. Но тогда более или менее заметная эволюция системы последует по истечении времени $\tau \gg \gamma^{-1} \Lambda_W$, или в пространственной задаче на масштабах, больших «длины свободного пробега» $\gamma^{-1} |\partial \omega / \partial k| \Lambda_W$, где

$$\Lambda_W \equiv \ln (W/W_{th}) \gg 1. \quad (5.3)$$

Здесь W — характерная величина плотности энергии в квазилинейной задаче (некоторые оценки последуют ниже). Точное значение k_{max} , а равно и коэффициент в правой части (5.2) не особенно важны, потому что сама оценка (5.3) имеет лишь логарифмическую точность. Поэтому если функция $\gamma_k(\mathbf{k})$ имеет в k -пространстве максимум или какой-то неоднородный профиль, то профиль $W_k(\mathbf{k})$ будет ему следовать, но окажется более резким, укрупненным, что следует из линейного соотношения

$$W_k \approx W_{k(th)} \exp(\gamma_k \tau).$$

Если $\tau \gg \gamma^{-1}$, профиль W_k обостряется экспоненциально.

Предположим, что наш пучок — узкий в пространстве скоростей: $\Delta v, \Delta v_{\perp} \ll v_b$. Сравнивая трехмерное уравнение (4.16) с одномерной оценкой инкремента (2.38), нетрудно получить угловую зависимость $\gamma_k \approx \gamma_{max}(k_{\parallel}/k) \sim \cos \angle \mathbf{k} \mathbf{v}_b$. Этого, в общем, достаточно, чтобы при многократном возрастании плотности шумов от теплового уровня мы в конце концов имели дело с почти одномерным профилем W_k . Правда, это не означает, что и релаксация пучка тоже будет одномерной (см., например, (4.17)). Но одномерность релаксации уже и в самом деле может быть обусловлена внешним магнитным полем, которое для этого и не должно быть особенно сильным. Инжекция пучка в ловушку вдоль магнитного поля — достаточно типичная ситуация в плазменном эксперименте.

Заключая эти рассуждения, мы хотели бы заметить, что при решении первых квазилинейных задач подобных аргументов не приводилось. Впоследствии их результаты выглядели почти бесполезными, «переидеализированными». Но хорошая теория бесполезной не бывает.

Итак, обратимся к одномерной системе квазилинейных уравнений. Для простоты рассмотрим резонансное взаимодействие ленгмюров-

ских волн с пучковыми либо плазменными электронами, редуцируя систему (4.16), (4.17) применительно к одномерному случаю. Тогда δ -функции уничтожаются при интегрировании, k и v оказываются явно связанными условием черенковского резонанса $v = \omega_{pe}/k$. Полная система уравнений оказывается достаточно простой:

$$\frac{\partial W_k(v)}{\partial t} = \pi \omega_{pe} v^2 W_k \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial f(v)}{\partial t} = \left(\frac{2\pi e}{m} \right)^2 \frac{\partial}{\partial v} \frac{W_k}{v} \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (5.5)$$

Как обычно, исследуем возможность стационарного состояния. Последнее в рамках уравнений (5.4), (5.5) обусловлено одним из двух равенств — либо $\partial f/\partial v = 0$ (взаимодействие «отключено»), либо $W_k(v) = 0$ (тривиальный случай). Еще одна возможность, стоящая упоминания, — стационарное состояние лишь для уравнения (5.5)

$$(W_k/v) \partial f/\partial v = \text{const},$$

т. е. стационарный поток частиц в пространстве скоростей. Уравнение (5.4) в этом случае остается нестационарным. Истинно стационарный режим, как уже было сказано, задается условиями

$$\partial f/\partial v = 0, \quad \text{если } W_k(v) \neq 0, \quad (5.6)$$

$$W_k = 0, \quad \text{если } \partial f/\partial v \neq 0.$$

Вообще говоря, могут существовать еще точки шивки в пространстве скоростей, где эти условия вырождаются в неопределенность.

В последующих вычислениях мы опустим, ради упрощения формул, все индексы, а также независимую переменную v :

$$f \equiv f(v), \quad \omega \equiv W_k(v).$$

Оказывается, для системы (5.4), (5.5) может быть найден специфический интеграл движения — его так и называют квазилинейным (Веденов и др., 1961 г.). Уравнение (5.4) переписывается в форме

$$\omega \partial f/\partial v = (\pi^{1/2} \omega_{pe} v)^{-2} \partial \omega/\partial t,$$

которая подставляется в уравнение (5.5), тем самым превращая его в закон сохранения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[f - \frac{\omega_{pe}}{nm} \frac{\partial}{\partial v} (\omega v^{-3}) \right] = 0. \quad (5.7)$$

Уравнение (5.7) позволяет связать результат квазилинейной релаксации с начальными условиями. Важно помнить, конечно, что

сама релаксация остается сложным нелинейным процессом. Характерное время ее грубо можно оценить из уравнения (5.5):

$$\tau^{-1} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{nm} \omega v^{-3} \approx \omega_{pe} \frac{\omega_{pe}}{v} \frac{W_k}{nmv^2} \approx \frac{\omega_{pe} W}{nT}.$$

В бесстолкновительной плазме $\tau \ll v_{ei}^{-1}$, в то же время $\tau \gg \omega_{pe}^{-1}$, и это позволяет нам окончательно определить «окно параметров», в кото-

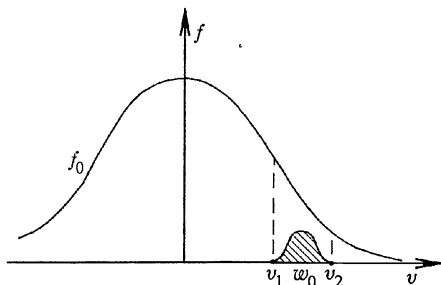


Рис. 5.1. Начальное распределение ленгмюровских шумов (заштриховано) в v -пространстве на фоне начального распределения частиц

ром можно пользоваться квазилинейной теорией. Базовым параметром будет для нас величина W/nT (ее иногда называют степенью турбулентности), которая должна удовлетворять условиям

$$1 \gg W/nT \gg N_D^{-1}. \quad (5.8)$$

Оба неравенства были получены как следствие достаточно грубых оценок; тем не менее, условия (5.8) в случае ленгмюровской турбулентности оказываются корректными. Некоторые нюансы могут возникнуть лишь в связи с фазовой корреляцией (см. гл. 13).

Попробуем приложить уравнение (5.7) к проблеме квазилинейной релаксации в плазме с некоторым начальным спектром ленгмюровских шумов, предварительно созданных внешним источником. Начальная ситуация схематически показана на рис. 5.1. Можно видеть, что плотность шумов ω_0 отлична от нуля в интервале фазовых скоростей $v_1 < \omega/k < v_2$, чем и определяется резонансная область в v -пространстве. Из квазилинейного интеграла

$$f_\infty - \frac{\omega_{pe}}{nm} \frac{\partial(\omega_\infty v^{-3})}{\partial v} = f_0 - \frac{\omega_{pe}}{nm} \frac{\partial(\omega_0 v^{-3})}{\partial v} \quad (5.9)$$

следует спектр шумов в конечном состоянии:

$$\omega_\infty = \omega_0 + v^3 \frac{nm}{\omega_{pe}} \int_{v_1}^v (f_\infty - f_0) dv. \quad (5.10)$$

Возможны два типа решений. Первый соответствует полному затуханию волн — в этом случае (5.9) дает возможность найти конечное электронное распределение f_∞ . Второй представляет иное стационарное состояние: $\partial f/\partial v = 0$. Здесь функция распределения

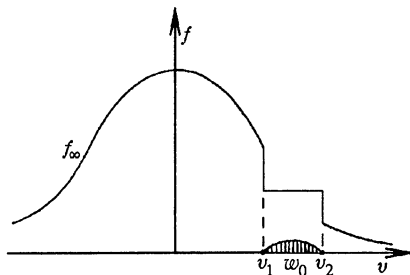


Рис. 5.2. Результат квазилинейной релаксации, стартовавшей с начальных условий, изображенных на рис. 5.1

при $t \rightarrow \infty$ может быть получена из (5.10). Характер результата представлен на рис. 5.2. Функция распределения обращается в константу:

$$f_\infty = \frac{1}{v_2 - v_1} \int_{v_1}^{v_2} f_0(v) dv.$$

Точки сшивки (v_1, v_2) , как уже отмечалось, являются особыми в том смысле, что в них нарушаются соотношения (5.9), (5.10). Корректное рассмотрение малой окрестности этих точек обычно оказывается невозможным в рамках базисной, т. е. квазилинейной, теории. Более того, нельзя применять и ту технику, которая приводила бы к уравнениям (2.34), (2.35) в случае «функций скачка».

Квазилинейный интеграл движения (5.7) не заменяет, но дополняет обычный интеграл энергии:

$$\begin{aligned} \int_{k_{\min}}^{k_{\max}} (\omega_0 - \omega_\infty) dk &= \frac{nm}{\omega_{pe}} \int_{v_1}^{v_2} \frac{dv'}{v'^2} \omega_{pe} v'^3 \int_{v_1}^{v'} (f_0 - f_\infty) dv = \\ &= \int_{v_1}^{v_2} nmv' dv' \int_{v_1}^{v'} (f_0 - f_\infty) dv = \\ &= - \int_{v_1}^{v_2} \frac{m v v'^2}{2} dv' \frac{\partial}{\partial v'} \int_{v_1}^{v'} (f_0 - f_\infty) dv = \int_{v_1}^{v_2} dv \frac{m n v^2}{2} (f_0 - f_\infty). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Интегрируя (5.11) по частям, мы воспользовались законом сохранения числа частиц

$$\int_{v_1}^{v_2} (f_0 - f_\infty) dv = 0,$$

а также очевидным соотношением

$$\int_{v_1}^{v_1'} (f_0 - f_\infty) dv = 0.$$

Оба интеграла движения могут использоваться как в случае полного затухания, так и в случае «плато» на функции распределения, а равно и в произвольном общем случае. Напомним, что мы связали начальное и конечное состояния, не рассматривая динамику релаксации. В дополнение к этим интегралам движения можно получить еще ряд полезных соотношений из уравнений (4.16), (4.17), например закон роста энтропии. Как уже отмечалось, последний обеспечивается вкладом кулоновских столкновений в затухание Ландау и родственные процессы; в квазилинейную теорию он формально входит через посредство условия некогерентности (4.1). Столкновения могут и явно вступить в игру наряду с квазилинейной релаксацией, если таковая достаточно растянута во времени из-за малости $\partial f/\partial v$. Во всяком случае, они начинают работать не раньше, чем спустя время порядка v_{ei}^{-1} от начала процесса, обеспечивая релаксацию распределения частиц (см., например, рис. 5.2) к равновесному максвелловскому распределению.

Обратимся к пространственной задаче. Она более адекватна проблеме динамики различных потоковых неустойчивостей, особенно неустойчивости пучка в плазме. Для простоты мы еще раз рассмотрим возбуждение ленгмюровских волн электронным пучком. Пусть этот пучок инжектируется в плазму на границе $x = 0$. Стационарный пространственный аналог уравнений (5.4), (5.5) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{1}{3} \pi \omega_{pe} v^2 \omega \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (5.12)$$

$$v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{nm} \frac{\partial}{\partial v} \omega \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (5.13)$$

где $f \equiv f_b(v)$,

$$\partial \omega / \partial k = 3(kr_{De})v_{Te} = 3(kr_{De})^2(\omega/k) = 3v_{Te}(v_{Te}/v).$$

Итак, (5.12) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\pi \omega_{pe}}{3v_{Te}^2} v^3 \omega \frac{\partial f}{\partial v}. \quad (5.14)$$

Качественный результат квазилинейной релаксации достаточно просто выглядит в пределе $v_b \gg v_{Te}$. Конечное распределение опять имеет вид плато (рис. 5.3). В пространстве скоростей не может остаться

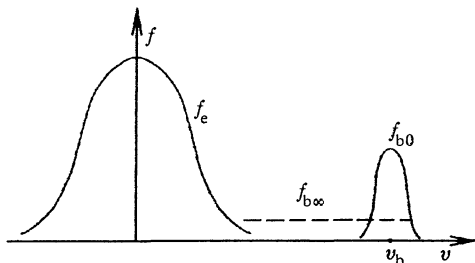


Рис. 5.3. Одномерный режим релаксации пучка в плазме

ни одной области с $\partial f / \partial v > 0$ (точки сшивки вновь приходится исключать). Конечно, говоря « $\partial f / \partial v > 0$ », мы имеем в виду полупространство $v > 0$, в другом полупространстве условие неустойчивости меняет знак, $\partial f / \partial v < 0$. Изображая конечное распределение на рис. 5.3, мы учли, что частицы не могут «возникать из ничего» в области v -пространства, где их раньше не было. Это немедленно следует из уравнения (5.13) или (5.5), потому что эти уравнения диффузионные. Следовательно, мы молчаливо предполагаем, что область $v_{Te} < v < v_b$ была не совсем пуста, что и обеспечит формирование конечного плато. Вообще говоря, может происходить также процесс неадиабатического, а значит, и недиффузионного черенковского взаимодействия, но он не может быть включен в квазилинейную модель. В обычных плазменных системах роль его пренебрежима, но в динамике высокоэнергичных космических лучей в плазме какую-то роль играет и этот канал.

Подобно (5.7), в пространственной задаче существует свой квазилинейный интеграл:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[v f - \frac{3\omega_{pe} v_{Te}^2}{nm} \frac{\partial}{\partial v} (\omega v^{-4}) \right] = 0. \quad (5.15)$$

Конечная спектральная плотность ленгмюровских осцилляций полностью задается этим интегралом,

$$\omega_\infty = \omega_0 + v^4 \frac{nm}{3\omega_{pe} v_{Te}^2} \int_{v_1}^v v' (f_\infty - f_0) dv', \quad (5.16)$$

где $\omega_0 \cong 0$ в основной области плато. Второй интеграл движения преобразуется в пространственной задаче через поток энергии:

$$\int_{k_1}^{k_2} \omega \frac{\partial \omega}{\partial k} dk + \int_{v_1}^{v_2} v \frac{mnv^2}{2} (f_\infty - f_0) dv = 0. \quad (5.17)$$

Как правило, в отличие от (5.7) или (5.15), демонстрирующих конечный результат квазилинейной релаксации, динамика ее оказывается очень сложной и обычно не допускает аналитического описания. Но исключения все же бывают. Они особенно интересны в контексте проблемы последующего объединения в едином сценарии квазилинейных и существенно нелинейных эффектов. Полезно рассмотреть примеры такого рода.

Начнем с автомодельного решения задачи о релаксации пучка в плазме, полученного Ивановым и Рудаковым (1966 г.). Ограничимся в качестве примера начальной (т.е. временной) задачей. Соответственно исходим из уравнений (5.4), (5.5). Удобным оказывается ввести безразмерные переменные:

$$\begin{aligned} F &= \pi(n/n_b)uf_b, \quad \varepsilon = W_k \omega_{pe}/(2n_b m V^3), \\ \tau &= \omega_{pe} t n_b/n, \quad V = v/u, \end{aligned} \quad (5.18)$$

где u — начальная скорость электронов; $\int F dV = \pi$. Важно отметить, что начальное распределение электронов пучка предполагается узким, $\Delta v_b|_{t=0} \ll u$, хотя асимптотический результат не особенно чувствителен к этому предположению. Электроны плазмы не релаксируют, поскольку предполагаются нерезонансными. Перепишем (5.4), (5.5) в безразмерной форме:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = \varepsilon V^2 \frac{\partial F}{\partial V}, \quad (5.19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial V} \left(\varepsilon V^2 \frac{\partial F}{\partial V} \right). \quad (5.20)$$

Квазилинейный интеграл (5.7) также может быть переписан в безразмерном виде:

$$F - F_0 = \partial(\varepsilon - \varepsilon_0)/\partial V, \quad (5.21)$$

где $F_0(V)$ — начальное распределение частиц и $\varepsilon_0(V)$ — начальное распределение шумов. Уравнение (5.21) позволяет исключить F и преобразовать (5.19), (5.20) в единственное уравнение

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} = V^2 \varepsilon \frac{\partial^2(\varepsilon - \varepsilon_0)}{\partial V^2} + V \varepsilon \frac{\partial F_0}{\partial V}. \quad (5.22)$$

Это уравнение в области V -пространства, где $\partial F_0/\partial V = 0$, подобно уравнению, описывающему теплоперенос в среде с коэффициентом теплопроводности, степенным образом зависящим от теплосодержания: $\chi \sim Q^n$. Известно, что в этом случае перенос тепла происходит в виде нелинейной тепловой волны с крутым фронтом. В пространстве при этом существуют области, куда тепло еще не поступило, соответственно температура в них равна начальной. Для подобных

задач довольно типичны автомодельные режимы релаксации. Допустим, что пучок в v -пространстве расширился до некоторой минимальной скорости V_{\min} , причем $1 - V_{\min} \ll 1$ (а значит, $V_{\min} \gg V_{Te}/u$). На начальной стадии релаксации происходит сглаживание начальной функции распределения f_0 , соответственно на этой стадии важную роль играет последний член в правой части (5.22),

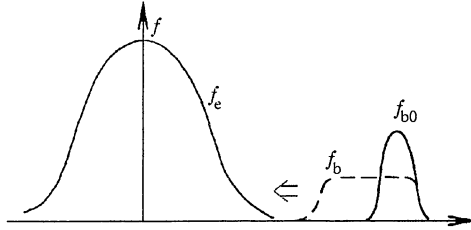


Рис. 5.4. «Ударная волна» в пространстве скоростей

тогда как на следующей стадии можно уже вводить автомодельные переменные и искать соответствующее решение. Это удастся сделать в предположении, что $v_{Te} < v < u$. Итак, стартовав с условий, схематически изображенных на рис. 5.3 (сплошная кривая), мы приходим к ситуации, представленной на рис. 5.4. Пучковая неустойчивость обеспечивает возбуждение шумов в резонансной области v -пространства (или k -пространства) (см. (2.35), (2.38)). В результате происходит сглаживание начального распределения, как обычно при диффузии. При этом левая граница пучка в v -пространстве перемещается медленно из-за малой начальной плотности шумов (см. (5.3)), тогда как внутри области пучка в v -пространстве уровень шумов много больше, так что $\partial F/\partial V \rightarrow 0$, а окончательная картина выглядит подобно ударной волне в пространстве скоростей (рис. 5.4). Это и есть автомодельный режим. Заметим, что приближение узкого начального распределения как раз и дает основание для последующего приближения $\partial F_0/\partial V = 0$ в большей части интересного для нас интервала скоростей. Если пучок все еще остается узким в v -пространстве, $1 - V_{\min} \ll 1$, то $\varepsilon(V) \cong \varepsilon(1)$, и уравнение (5.21) дает

$$\varepsilon(1) - \varepsilon_0(1) \cong - \int_{V_{\max}}^{V_{\min}} F dV = \pi. \quad (5.23)$$

Пренебрегая последним членом в правой части (5.22), можно вводить автомодельные переменные

$$\xi = (1 - V)(\pi\tau)^{-1/2}, \quad \varphi = \pi^{-1}(\varepsilon - \varepsilon_0). \quad (5.24)$$

В этих переменных (5.21), (5.22) принимают вид

$$F = -(\pi/\tau)^{1/2} d\varphi/d\xi, \quad (5.25)$$

$$-\frac{1}{2} \xi d\varphi/d\xi = (\varphi + \varphi_0) d^2\varphi/d\xi^2, \quad (5.26)$$

где $\varphi_0 = \varepsilon_0/\pi$. Уравнение (5.23) в этих обозначениях выглядит очень просто: $\varphi(0) = 1$; в то же время $\varphi \rightarrow 0$ при $\xi \rightarrow \infty$, потому что ни в какой области не будет шумов, пока в нее не придет «ударный фронт». Это верно, конечно, лишь с точностью до тепловых шумов, но они пока не включены в модель, так что ими придется заниматься отдельно.

Посмотрим внимательно на уравнение (5.11). Можно видеть, что конечная плотность шумов порядка кинетической энергии пучка. В случае холодной плазмы она формально может оказаться даже больше, чем тепловая энергия. На самом деле это исключено — в противном случае произошло бы пересечение траекторий при осцилляторном движении электронов. К тому же, в последующих главах мы увидим, что величина W/nT не может превзойти даже меньшего предела, а именно $nT(kr_{De})^2$. Во всяком случае, логарифм Λ_W (см. (5.3)) не имеет права превосходить по порядку величины кулоновского логарифма $\Lambda = \ln N_D$, так что $\varphi_0^{-1} \approx N_D n_b/n \gg 1$ в большинстве случаев. Это дает нам возможность получить приближенное решение автомодельного уравнения (5.26):

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2} \xi_0 (\xi_0 - \xi) \ln \frac{\varphi}{\varphi_0} + \frac{1}{2} (\xi_0 - \xi) - \frac{1}{2} (\xi_0 - \xi)^2 + \dots, \quad (5.27)$$

где ξ_0 соответствует волновому («ударному») фронту. На первый взгляд, два последних члена в правой части (5.27) малы по сравнению с первым, но они вносят существенный вклад в $d^2\varphi/d\xi^2$. В простейшей форме

$$\varphi(\xi) \cong \frac{1}{2} \xi_0 (\xi_0 - \xi) \ln \frac{1}{\varphi_0}. \quad (5.28)$$

Граничное условие $\varphi(0) = 1$ определяет константу

$$\xi_0 = \left[\frac{2}{\ln(1/\varphi_0)} \right]^{1/2}, \quad (5.29)$$

которая, в свою очередь, позволяет оценить время релаксации:

$$\Delta\tau \approx \pi^{-1} (\Delta v/u\xi_0)^2,$$

где Δv — расстояние в v -пространстве, пройденное волновым фронтом. Далее, используя оценку инкремента Ландау (2.38), можно получить

$$\Delta t \approx \gamma^{-1} \xi_0^{-2} \approx (2\gamma)^{-1} \ln(1/\varphi_0), \quad (5.30)$$

где $\gamma = \pi\omega_{pe}(n_b/n)(u/\Delta v)^2$.

Этот результат достаточно интересен. Для оценки полного времени релаксации необходимо оценить линейный инкремент в конечном состоянии и умножить его на величину порядка кулоновского логарифма ($n/n_b \ll N_D$, так что $\ln(n/n_b)$ зачастую пренебрежимо мал). Итак, главная особенность всего этого сценария — «ударная волна в пространстве скоростей».

Следующий эффект, который мы хотели бы продемонстрировать, сопровождает инжекцию пучка в полупространство, заполненное плазмой. Конечный результат (для однородной плазмы) полностью описывается формулами (5.16), (5.17). Но в реальном эксперименте пространственная и временная задачи обычно «запутаны», в том смысле, что инжекция как-то «включается» во времени. Как следствие происходит накопление шумов. Геометрия задачи представлена на рис. 5.5. Само накопление случается вблизи поверхности $x = +0$. Авангардные частицы пучка раскачивают ленгмюровские волны у плазменной границы. Дальнейшая эволюция системы следует сопряженной паре уравнений

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial \omega}{\partial x} = \frac{\pi}{3} \omega_{pe} v^2 \omega \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (5.31)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\pi \omega_{pe}^2}{nm} \frac{\partial}{\partial v} \frac{\omega}{v} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (5.32)$$

отличающихся от (5.12), (5.13) временными производными. Для дальнейшего существования, что $v \approx v_b \gg v_{Te}$, тогда как $\partial \omega / \partial k = 3(kr_{Te})v_{De} \ll v_{Te}$. Таким образом, ленгмюровские волны, возбужденные вблизи плазменной поверхности, распространяются со скоростями, много меньшими скоростей электронов пучка. В результате частицы, следующие за фронтом пучка, имеют дело уже с хорошо развитыми осцилляциями, так что происходит интенсивная релаксация пучка. У самой поверхности возникает тонкий слой особенно интенсивных шумов. Из-за лавинного характера процесса накопления эффективная толщина слоя экспоненциально падает во времени: $\Delta x \sim \exp(-\gamma_1 t)$. Это не означает, конечно, схлопывания этого слоя. Плотность ленгмюровских волн растет везде, но ее пространственное распределение вблизи плоскости $x = +0$ становится все более и более узким. Вблизи границы шумы «раскачиваются» по закону линейной теории: $\omega \sim \exp(\gamma_1 t)$. Вместе эти две оценки определяют неэкспоненциальный характер зависимости от времени полной осцилляторной энергии $\int \omega dx$, что само по себе достаточно очевидно, потому что мы имеем дело не с неисчерпаемым энергетическим резервуаром, а с постоянным потоком энергии в плазму $mn_b v_b^3 / 2$. Экспоненциальное уменьшение во времени толщины слоя обусловлено вторым членом в левой части (5.31). Он вступает в иг-

ру вопреки малости групповой скорости, когда величина $\partial\omega/\partial x$ становится достаточно большой, т.е. распределение $\omega(x)$ становится достаточно острым. В конце концов такое насыщение ведет к стационарной пространственно-профилированной картине пучковой релаксации, которая была описана выше. Верхний предел плотности шумов в каждой точке стремится со временем как раз к ω_∞ , соответствующему (5.16). В более подробном изложении этот сценарий можно найти в любой из двух книг Цытовича (1967 г., 1971 г.).

Третий пример нетривиальной динамики релаксации базируется главным образом на идеях Рютова (см. Веденов, Рютов, 1972 г.) и соответствует все той же геометрии рис. 5.5, но в предположении достаточной гладкости профиля концентрации. Предположим, что в нашей одномерной задаче существует достаточно слабый продольный градиент концентрации,

$$|\nabla n/n| \ll \omega_{pe}/v_b. \quad (5.33)$$

Условие (5.33) обеспечивает правомерность приложения к данной задаче квазиклассического приближения, или, что то же, геометрической оптики. При этом, вообще говоря, неважно, куда направлен инградиент плотности. Пучок может распространяться как вдоль, так и навстречу градиенту, или (но это уже не одномерная модель) нормально к направлению градиента — точные решения во всех этих случаях будут разные, но простые оценки оказываются столь же универсальными, как и генеральная идея. Итак, мы взяли в качестве базовой геометрию рис. 5.5. Самой интересной для нас будет такая ситуация, когда квазилинейная релаксация вообще не происходит.

Если неравенство (5.33) удовлетворяется, то верны уравнения (4.38)–(4.40), (4.44), (4.45). В частности, можно пользоваться такой оценкой: $\Delta k(t) \approx \omega_{pe} |\nabla n/n| \Delta t$, где Δk — дрейф плазмона в k -пространстве за время Δt из-за неоднородности концентрации. Соответственно

$$\Delta(\omega/k) \approx \omega_{pe} \Delta k(t)/k^2 \approx v_b^2 \Delta k / \omega_{pe} \approx v_b^2 \Delta t |\nabla n/n|.$$

Мы, однако, знаем, что необходимое условие квазилинейной релаксации — условие резонанса $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$. Дрейф плазмона в фазовом пространстве приводит к расстройке, как следствие эффективность взаимодействия частиц и плазмонов падает. Чтобы взаимодействие

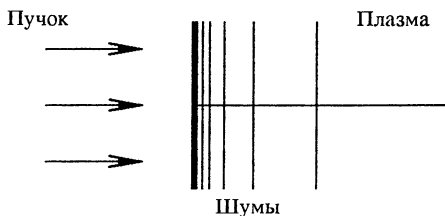


Рис. 5.5. Инжекция пучка в полупространство, заполненное плазмой

все же имело место, мы не должны допускать, чтобы величина расстройки превзошла ширину пучка в v -пространстве:

$$\Delta v_b > \Delta(\omega/k) = v_b^2 |\nabla n/n| \Delta t.$$

С другой стороны, релаксация вообще может происходить лишь при условии, что Δt превосходит величину Λ/γ , где Λ дается равенством (5.3). Для узкого пучка (когда релаксация почти не происходит) γ можно оценивать, исходя из чисто линейных соображений (см. (2.38)):

$$\Delta v_b \gg v_b^2 |\nabla n/n| (\Lambda/\omega_{pe}) (\Delta v_b/v_b)^2 (n/n_b).$$

В итоге получаем необходимое и достаточное условие релаксации

$$\Delta v_b < |n_b/\nabla n| \omega_{pe}/\Lambda. \quad (5.34)$$

Это очень простое неравенство определяет, помимо прочего, максимальную ширину пучка в k -пространстве как следствие релаксации. Это, в частности, дает оценку также и для максимального потока энергии в плазму:

$$\mathfrak{J} \approx \frac{3}{2} m n v_b^2 (\Delta v_b)_{\max} \ll m n v_b^3.$$

Для более резких градиентов плотности даже гидродинамическая пучковая неустойчивость не могла бы эффективно менять функцию распределения пучка.

Очень часто (и даже — как правило) чисто квазилинейные эффекты в эксперименте трудно идентифицировать из-за сильного влияния нелинейности. С другой стороны, как раз эта «не-релаксация» есть эффект безусловно квазилинейный, и она может быть зарегистрирована (см. Голованов и др., 1977 г.). Действительно, нелинейные эффекты не могут вмешаться в сценарий, если даже квазилинейная релаксация подавлена. В последующих главах мы еще не раз столкнемся с квазилинейными эффектами, но уже в контексте более сложных явлений. Однако прежде обратимся к новому аспекту квазилинейной теории.

Концепция слабой турбулентности как газа квазичастиц. Границы применимости квазилинейной теории

Еще в конце главы 2 мы обсуждали возможность представления плазменных волн как ансамбля квазичастиц и соответственно затухания Ландау и пучковой неустойчивости как черенковских процессов. Более точно, в каждом таком случае одновременно должны рассматриваться два противоположно протекающих процесса излучения и поглощения, изображенных на рис. 6.1 (с учетом соотношения (2.39)) для частного случая взаимодействия ленгмюровских плазмонов с электронами. В рамках кинетического описания эти электроны должны

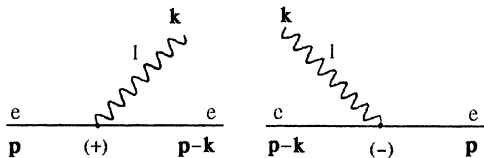


Рис. 6.1. Диаграммы черенковского взаимодействия

быть представлены функцией распределения $f(\mathbf{p})$ или $f(\mathbf{v})$, тогда как плазмоны будут соответственно представлены функцией $N_{\mathbf{k}}$, введенной соотношением (4.43). Здесь и далее мы будем пользоваться именно этим определением, но говоря о реальных квазичастицах, т. е., рассматривая какие-то процессы с их участием, будем считать величину $\int N_{\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ как бы безразмерной или даже заменять интеграл суммой. Иначе говоря, в количественных соотношениях нет смысла удерживать постоянную Планка, которая не может войти в ответ, но в то же время есть смысл рассматривать элементарные процессы на языке частиц, которые можно «пересчитать».

Здесь (и не раз в дальнейшем) мы будем пользоваться фейнмановскими диаграммами (вроде тех, что изображены на рис. 6.1), но с единственной целью идентификации и классификации физических

процессов и никоим образом для детального вычисления матричного элемента. Последнее в плазме достаточно бессмысленно, хотя бы уже по причине чрезвычайного многообразия плазменных волн — квазичастиц. Тем не менее, сам язык квантовой теории поля оказывается для наших целей очень удобен, и такой подход дает заметные преимущества по сравнению с непосредственным и никак не «одухотворенным» вычислением нелинейных эффектов в плазме на основе теории возмущений.

Начнем с того, что наметим некоторые элементы такой квантовополевой конструкции, а затем проверим себя, применив эту модель к уже известному нам черенковскому взаимодействию. Представим себе некоторый ансамбль частиц (или квазичастиц — это в данном случае неважно), который может как-то размещаться в конфигурационном пространстве, где каждое состояние можно изобразить определенным набором ψ -функций:

$$\Psi = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots\}, \quad (6.1)$$

где ψ_1, ψ_2 и т. д. — волновые функции, соответствующие состояниям первой частицы, второй и т. д. Эти элементарные состояния должны быть правильно выбраны, чтобы служить базисом в пространстве конфигураций.

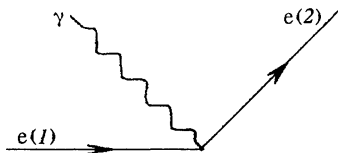


Рис. 6.2. Фейнмановская диаграмма фотоэффекта

Например, рассматривая фотоэффект (рис. 6.2), нужно брать конечное состояние $e(2)$ в виде плоской волны, но ни в коем случае нельзя делать то же самое для начального состояния $e(1)$, потому что в ряде Фурье межмодовое взаимодействие было бы столь сильным, что препятствовало бы корректному определению числа частиц в начальном состоянии. Поэтому

последнее следует выбрать, как хорошо известно в квантовой электродинамике, в виде точного решения уравнения Дирака в кулоновской потенциальной яме. Использование же его, по сути, фурье-разложения в связанном состоянии некорректно.

Подобным же образом в теории плазменной турбулентности невозмущенные состояния как частиц, так и квазичастиц нужно выбирать по принципу свободы от взаимодействия в нулевом приближении или, что то же, при $t \rightarrow \pm \infty$. Если это условие выполняется, то волновая функция (6.1), или «точка в конфигурационном пространстве», адекватно представляется просто набором чисел:

$$\Psi \Leftrightarrow \{N_1, N_2, N_3, \dots\}, \quad (6.2)$$

где N_1, N_2, \dots — числа частиц соответственно в состояниях номер 1, 2 и т. д. Конечно, турбулентная плазма — система более сложная, нежели те, что рассматриваются в квантовой электродинамике (см. рис. 6.2): она всегда многокомпонентна (электроны + ионы всех

сортов + все возбужденные моды волн-квазичастиц). Тем не менее, во многих случаях проблема оказывается решаемой, особенно когда мы можем рассматривать все частицы как «квазисвободные» (т.е., как в газе) — для квазичастиц это соответствует приближению плоских волн. Вообще говоря, это не всегда корректно, в частности как раз для квазичастиц, и особенно в режиме сильной турбулентности, с которым нам еще предстоит познакомиться (гл. 12–15). Но пока что мы предположим, что все (квази)частицы действительно можно представить в форме плоских волн. Если, как было заявлено выше, взаимодействием в самом деле можно пренебречь в начальном и конечном состояниях, то его можно рассматривать как возмущение или некоторый набор фундаментальных возмущений, имеющих (каждое) следствием переход одной из (квази)частиц из одного фундаментального состояния в другое. Например, рассмотрим такой переход между состояниями 1 и 2:

$$\{N_1, N_2, N_3, \dots\} \xrightarrow{\omega(1, 2)} \{N_1 - 1, N_2 + 1, N_3, \dots\}, \quad (6.3)$$

где функция $\omega(1, 2)$, изображенная под стрелкой перехода, — фундаментальная вероятность (квадрат матричного элемента), соответствующая данному переходу. Заметим, что эта вероятность как бы суммирует все диаграммы с одними и теми же начальным и конечным состояниями, у которых, согласно обычным квантовомеханическим правилам, должны быть просуммированы амплитуды. Таким образом, мы не различаем различные каналы с одинаковыми начальными/конечными состояниями. Лишь существенно различные процессы должны быть разделены в кинетике, как это показано на рис. 6.1.

Как уже говорилось, мы не станем вводить какую-либо универсальную процедуру вычисления вероятностей, как делается в квантовой теории поля. В самом деле, даже в немагнитной, однородной, безграничной, бесстолкновительной максвелловской плазме существуют три моды плазменных волн: ленгмюровские, поперечные электромагнитные волны и ионный звук. А стоит нарушить хотя бы одно условие из поименованных выше, как число мод возрастает, может быть, даже в несколько раз. В то же время в большинстве конкретных случаев необходимая нам фундаментальная вероятность может быть без особых затруднений вычислена с помощью теории возмущений (в дальнейшем мы научимся это делать), а потому сосредоточимся на проблемах более общего характера.

Чтобы формализовать переход, отраженный формулой (6.3), введем, как обычно, оператор рождения частицы a_j^+ и, соответственно, оператор уничтожения a_j . Тогда (6.3) может быть переписана в следующей форме:

$$a_2^+ a_1 \{N_1, N_2, N_3, \dots\} = \{N_1 - 1, N_2 + 1, N_3, \dots\}. \quad (6.4)$$

Мы видим, как оператор уничтожения a_1 сокращает на единицу число заполнения состояния 1, а затем оператор рождения увеличивает на

единицу число заполнения состояния 2. И все переходы в системе, записанной в форме (6.1) или (6.2), можно представить точно таким же образом. Например, реакция, изображенная на рис. 6.3, может быть описана следующим сложным оператором: $a_4^\dagger a_5^\dagger a_6^\dagger a_1 a_2 a_3$.

Зачем это нужно? Дело в том, что полная вероятность перехода, которая в коллективной кинетике формирует интеграл столкновений (штосс-член), зависит не только от $\omega(i, j)$, но и от состояния системы — и эту зависимость очень удобно выразить посредством собственных значений операторов рождения и уничтожения. Эти значения оказываются сугубо различными для Ферми- и Бозе-частиц. Начнем, например, с бозонов — а они представляют все квазичастицы, соответствующие плазменным волнам. Действительно, волна в плазме может существовать в принципе с любой амплитудой (если исключить нелинейное самовоздействие). Произвольная амплитуда линейной волны (даже ограниченная сверху) означает возможность существования произвольного N_k — а это свойство Бозе-частиц.

Получим квадрат модуля собственных значений операторов рождения и уничтожения для этого случая. Мы ограничиваемся квадратом, потому что фазовый множитель собственной величины для наших целей значения не имеет. Наша цель — вычислить вклад этих операторов, а более точно — вклад чисел заполнения в полную вероятность. Когда мы сокращаем в первом состоянии одну из частиц посредством оператора a_1 , то мы при этом частиц не различаем, т. е. не знаем, какую именно из них мы сократили. Или иначе: мы обязаны просуммировать в этом процессе все параллельные каналы. Поэтому мы должны умножить фундаментальную вероятность на число N_1 , чтобы суммировать все возможности такого перехода. С другой стороны, создавая новую частицу во втором состоянии с помощью оператора a_2^\dagger , мы не сможем определить, какая из частиц в конечном состоянии новая. Любая из них годится на эту роль; значит, в данном случае фундаментальную вероятность следует умножать на $(N_2 + 1)$. Получается, что полная вероятность должна выглядеть следующим образом:

$$W(1, 2) = \omega(1, 2) N_1 (N_2 + 1). \quad (6.5)$$

Напомним, что в пределах большинства задач теории плазменной турбулентности нам предстоит иметь дело с классической идеальной плазмой, у которой, однако, уровень шумов существенно превышает уровень тепловых флуктуаций (полезно сравнить (5.2) и (5.3)). А посему в (6.5) должно быть $N_2 \gg 1$. Но, как оказывает-

ся, этой единицей не всегда можно пренебречь с самого начала. В ряде достаточно важных случаев — как мы увидим в следующей главе — она определяет первый неисчезающий порядок в теории возмущений.

В случае Ферми-частиц (в первую очередь — электронов) вычисление собственных значений оказывается даже более простым делом. Действительно, для фермионов разрешены только два числа заполнения: нуль или единица. Обозначим собственное значение оператора уничтожения через n_i (мы используем малые буквы, чтобы различать фермионы и бозоны). Именно его естественно поставить в качестве квадрата собственного значения. Если состояние занято, переход возможен, если же нет — невозможен. Что до конечного состояния, то переход запрещен, когда оно занято, и разрешен,

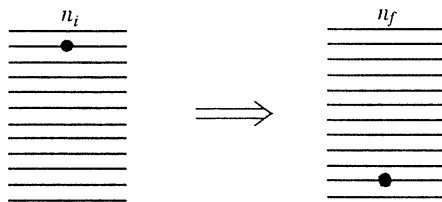


Рис. 6.4.

когда оно свободно. Эта ситуация с успехом реализуется, если квадрат собственного значения оператора рождения положить равным $(1 - n_2)$.

Мы можем заметно упростить ситуацию с собственными значениями операторов рождения или уничтожения, приняв во внимание, что плазма у нас классическая, идеальная, невырожденная. В такой плазме заполненные уровни расположены очень редко среди массы вакантных уровней (см. рис. 6.4). Поэтому элементарный процесс всегда «находит» свободное конечное состояние (по крайней мере, внутри резонансного контура), так что мы можем сразу положить $1 - n_2 \cong 1$. Но фактор n_1 , определенный начальным состоянием, остается существенным. Удобнее, однако, усреднить полную вероятность по фазовому пространству, исключив дискретность представления электронов, т.е. сделать замену $n_1 \Rightarrow nf(\mathbf{p}_1)$.

Ионы плазмы могут быть фермионами или бозонами в зависимости от происхождения плазмы и степени ионизации. Но это обычно не создаст проблемы; электроны и ионы взаимодействуют с шумами подобным образом, вся разница лишь в разных зарядах и массах частиц. Все рассуждения предыдущего абзаца остаются в силе и для бозонов, в чем нетрудно убедиться непосредственно.

А теперь попытаемся написать кинетическое уравнение для волн, соответствующее диаграммам рис. 6.1, т.е. затуханию Ландау

или пучковой неустойчивости. Первая из диаграмм этого рисунка соответствует рождению плазмона, а вторая — его поглощению. В соответствии со сказанным выше, можем написать:

$$\begin{aligned} \partial N_{\mathbf{k}}/\partial t = n \sum_{\mathbf{p}} \omega(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) f(\mathbf{p}) (N_{\mathbf{k}} + 1) - \\ - n \sum_{\mathbf{p}} \omega(\mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}; \mathbf{p}) \delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) f(\mathbf{p} - \mathbf{k}) N_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

В формуле (6.6), так же, как и в обозначениях рис. 6.1, мы еще раз положили постоянную Планка равной единице. Фундаментальные вероятности ω обоих процессов равны друг другу (что отвечает принципу детального равновесия). Обе δ -функции обеспечивают сохранение энергии, а о сохранении импульса мы позаботились заранее, как в уравнении (6.6), так и на диаграмме. Как мы уже знаем, в типичной идеальной плазме закон сохранения энергии вырождается: $\delta(\sum \varepsilon) \Rightarrow \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$. В конечном счете уравнение (6.6) сводится к следующему:

$$\partial N_{\mathbf{k}}/\partial t = N_{\mathbf{k}} \sum_{\mathbf{p}} n \omega'(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) [f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p} - \mathbf{k})], \quad (6.7)$$

где $\omega'(\mathbf{p}, \mathbf{k})$ — перенормированная фундаментальная вероятность. Затем, используя те же соображения, которые обусловили вырождение δ -функций, можно линеаризовать разность двух функций распределения. (Именно в этот момент постоянная Планка должна исчезнуть из наших уравнений, так что становится неважным, чему именно она была равна. В последующих примерах мы уже не будем обращать на это внимания.) Итак, мы получили ответ:

$$\partial N_{\mathbf{k}}/\partial t = 2\gamma_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}}; \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\mathbf{k}} = \int d\mathbf{p} n \omega''(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \partial f / \partial \mathbf{p} = \\ = \int d\mathbf{v} n \omega''(\mathbf{v}, \mathbf{k}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{k} \partial f / \partial \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Сравнивая его с (2.30), находим фундаментальную вероятность: $\omega'' = \pi \omega^3 / k^2 n$, и она не зависит от \mathbf{v} или \mathbf{p} . Разумеется, этот количественный результат справедлив только для взаимодействия ленгмюровских плазмонов с электронами, тогда как уравнение (6.8) отличается гораздо большей универсальностью.

Интересно заметить, что правильный знак правой части инкремента в уравнении (6.8) получается автоматически. Это может быть дополнительным тестом корректности нашей физической модели. Следующим этапом должно быть уравнение, описывающее эволюцию электронного распределения. Двух диаграмм, представленных на рис. 6.1, будет недостаточно, нужно добавить еще две (рис. 6.5, где знак вклада указан в скобках под каждой диаграммой). Дело в том, что теперь приходится учитывать все процессы поглощения и

рождения для каждого электрона с данным импульсом \mathbf{p} . Принимая во внимание все замечания, касающиеся вывода уравнения (6.8), можем сразу же предъявить следующий результат:

$$\begin{aligned} \partial f_{\mathbf{p}} / \partial t \cong & \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{p}; \mathbf{p} - \mathbf{k}, \mathbf{k}) N_{\mathbf{k}} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{p}/m) (f_{\mathbf{p}-\mathbf{k}} - f_{\mathbf{p}}) + \\ & + \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{p} + \mathbf{k}; \mathbf{p}, \mathbf{k}) N_{\mathbf{k}} \delta[\omega - \mathbf{k}(\mathbf{p} + \mathbf{k})/m] (f_{\mathbf{p}+\mathbf{k}} - f_{\mathbf{p}}). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Оба члена в правой части (6.9) отличаются малым «сдвигом» $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \mathbf{k}$, а также знаком вклада. Кроме того, внутри скобок мы

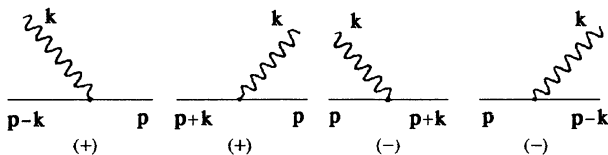


Рис. 6.5. Черенковские диаграммы — к эффекту диффузии частиц

видим две разности электронных функций распределения с тем же сдвигом. Таким образом, (6.9) можно дважды линеаризовать, следуя правилу $F(\mathbf{p} + \mathbf{k}) - F(\mathbf{p}) = \mathbf{k} \partial F / \partial \mathbf{p}$. Конечный результат

$$\frac{\partial f(\mathbf{p})}{\partial t} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \omega''(\mathbf{p}, \mathbf{k}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) N_{\mathbf{k}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \quad (6.10)$$

без труда представляется в форме

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha}} D_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial v_{\beta}}, \quad (6.11)$$

каковая идентична (4.15) или (4.17). Взяв, как и в предыдущем случае, $\omega'' = \pi \omega^3 / nk^3$, получаем в точности (4.17).

Проследив за выводом уравнений (4.16), (4.17), нетрудно представить себе, насколько более сложными окажутся следующие порядки теории возмущений. В особенности это относится к модам не столь простым, а, скажем, замагниченным, когда возможен не только черенковский, но и циклотронный резонанс $\omega = n\omega_B$. Соразмерно сложности растет и опасность ошибки. Построения, подобные только что выполненным, упрощают ситуацию. Во-первых, они дают возможность заранее знать структуру ответа. Во-вторых, дают возможность действовать конструктивно, а именно выбросить с самого начала большую часть слагаемых, оставляя те, которые в итоге должны привести к некоторой определенной комбинации полей — ведь коэффициент фундаментальной вероятности у всех членов должен быть один и тот же. Как следствие вычислительная процедура сокращается в несколько раз. Но, может быть, главным следствием нового подхода является новый «язык» плазменной турбулентности. Он позволяет конструировать турбулентные сценарии, в значитель-

ной степени обходясь вообще без вычислений. Он позволяет также представить иерархию нелинейных процессов и оценить границы применимости той или иной теоретической модели. Похожие методы используются в физике твердого тела. В физике плазмы они немного более просты, потому что не содержат квантовых эффектов, но в то же время и намного более разнообразны и богаты как «сюжетами», так и «участниками игры». В частности, черенковское взаимодействие, равно как и более высокие порядки эффектов той же природы в физике твердого тела не рассматриваются.

Все, о чем только что шла речь, имеет смысл лишь постольку, поскольку мы можем разделить процессы различных порядков нелинейности. В обратном случае не может быть построена теория возмущений, и нелинейная динамика не содержит внутренней иерархии, так

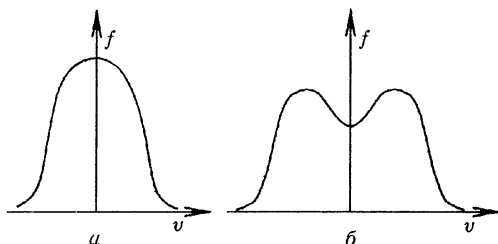


Рис. 6.6. Пример существенно сильной турбулентности

что решение любой задачи зависит прежде всего от везения. Иногда невозможно даже разделить осцилляторное и тепловое движение, так что распределение частиц в достаточно близкие по времени моменты может оказаться существенно различным (рис. 6.6).

Мы попытались в гл. 5 установить «окно параметров», в котором может работать квазилинейная теория (см. формулу (5.8)). Вообще говоря, главный параметр — степень турбулентности — оказывается (не по сути, но по форме) немного разным для различных плазменных мод. Например, он выглядит как $W/(mnc^2)$ для поперечных электромагнитных волн в плазме, в случае ионного звука он равен $W/(Mnc_s^2) = W/(nT)$. Его точный вид для ленгмюровских волн мы обсудим ниже. Во всех случаях критерии применимости квазилинейной теории и вообще приближения слабой турбулентности выглядят очень похожими на уравнение (5.8). Помимо этого критерия, должно быть справедливо приближение случайных фаз (4.1) — это значит, что, вообще говоря, не любой источник турбулентности порождает именно слабую турбулентность. Не существует универсальных рецептов установить, можно ли в случае, когда выполнено условие (5.8), ограничиться квазилинейным приближением, пренебрегая процессами высших порядков по W/nT . Последние, как правило, существенны для эволюции спектра шумов, однако пове-

дение частиц плазмы нередко удается представить в виде исключительно квазилинейной диффузии, но только обусловленной точным видом спектра W_k или N_k . Советуем иметь в виду несколько простых правил:

1. Если некоторая группа частиц (например, с $v > \omega/k$) оказывается в резонансе m -го (первого) порядка с плазменными волнами, ее вклад в высшие (> 1) резонансы пренебрежим, как пренебрежима и роль этих процессов в эволюции данной группы частиц.

2. Если источник турбулентности обеспечен какой-то кинетической неустойчивостью, приближение слабой турбулентности обычно хорошо работает, по крайней мере на достаточно продолжительной начальной стадии процесса.

3. Если рассматриваются нелинейные диссипативные процессы, как то: черенковское взаимодействие, нелинейное комптоновское рассеяние и т. д., приближение слабой турбулентности может быть использовано, так как тепловое движение частиц обеспечивает «хаотизацию» фундаментального акта взаимодействия. Это правило нарушается, если существен эффект захвата, но чем выше порядок нелинейности, тем меньше его возможная роль.

4. Если частицы не участвуют в качестве прямого агента в элементарном акте, процесс можно рассматривать в гидродинамическом представлении. Кинетическое рассмотрение может слегка подправить коэффициенты, но не может существенно модифицировать сами эффекты, если только распределение частиц не является существенно немаквелловским.

5. Эффекты взаимодействия волн с определенными фазами, т. е. так называемые параметрические неустойчивости (см. цитированную книгу Силина), в принципе могут рассматриваться на базе того же языка (можно, например, трактовать монохроматическую волну как Бозе-конденсат плазмонов). Но у них оказывается ниже порядок базового параметра нелинейности (см. ниже). К тому же, в этом пределе существует ряд эффектов — поворот фазы, модификация закона дисперсии и т. д., которые в приближение случайных фаз не укладываются.

Строя нелинейную иерархию, мы используем W/nT в качестве малого параметра. С другой стороны, при обсуждении диаграмм на рис. 6.1, 6.3, 6.5 мы считали N_k величиной, много большей единицы. Оба предположения корректны и как раз отвечают двум неравенствам (5.8).

Оценим малый параметр разложения для важного частного случая ленгмюровских волн. Наиболее простой путь к такой оценке базируется на использовании главных значений интегралов (2.25) и (4.12). Из них следует самосогласованная модификация $\epsilon(\omega, \mathbf{k})$ (вещественная часть) и $\partial f/\partial t$ (мнимая часть). Иначе говоря, они приводят к перенормировке зависимости $\omega(\mathbf{k})$. Прямая оценка $\delta\omega$ из этих интегралов не проста, но можно положить $\text{Re } \delta\omega \approx \text{Im } \omega$, где $\text{Im } \omega$ нужно взять как среднюю, т. е. эффективное обратное время релаксации. Эта

величина (см. гл. 5) может быть оценена следующим образом: $\tau \approx \omega_{pe} W/nT$; значит, и сдвиг частоты не может быть меньше. В дальнейшем, рассматривая процессы более высоких порядков, мы сможем подтвердить эту оценку — уже как эффективную частоту нелинейного взаимодействия. К сожалению, знак ее не может быть получен из столь же простых соображений. Для этого нам понадобится иная техника, которая будет представлена в гл. 13–15. Пока нам придется принять без доказательства, что знак частотного сдвига окажется отрицательным. Попробуем теперь выписать модифицированный закон дисперсии ленгмюровских волн, а для сравнения — общеизвестное выражение из механики:

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 - \frac{\kappa W}{nT} \right), \quad (6.12)$$

$$\mathcal{E} = mc^2 + \frac{p^2}{2m} + U(\mathbf{r}), \quad (6.13)$$

где $\kappa \approx 1$. Соотношение (6.13) представляет собой «закон дисперсии» для нерелятивистской частицы, записанный в релятивистской форме. Уравнения (6.12) и (6.13) очень похожи. Сделаем следующий шаг. Мы начали построение теории слабой турбулентности на базе почти линейных плоских волн. Взаимодействие между ними рассматривается как возмущение почти не взаимодействующего ансамбля. Иными словами, слабая турбулентность — это как бы газ плазмоннов, которые почти свободны и лишь слабо взаимодействуют друг с другом. Но так представлять дело можно лишь до тех пор, пока их совокупный потенциал не образует слишком глубокой ямы. Обычные частицы можно было бы считать свободными и оценивать их энергию как $p^2/2m$ до тех пор, пока $U \ll p^2/2m$. Естественно оценить адекватность модели слабой турбулентности для ленгмюровских волн аналогичным образом:

$$W \ll nT(kr_{De})^2. \quad (6.14)$$

При обратном знаке неравенства турбулентность становится сильной, хотя и не в смысле разделения и идентификации осцилляторного и теплового движения частиц.

Таким образом, для ленгмюровских волн, фундаментальной и одной из простейших плазменных мод, параметр разложения оказывается равным вовсе не W/nT , а $W/[nT(kr_{De})^2]$. К следствиям этого очень важного утверждения мы еще неоднократно вернемся.

Все базовые идеи и модели, которые обсуждались в этой главе, идентичны либо очень близки концепции индуцированных процессов, хорошо известной в современной физике — она является основанием для эйнштейновской теории фотоэффекта, физики лазеров и многих, преимущественно квантовых, частных физических эффектов.

Познакомившись таким образом с квазилинейной теорией, можно попытаться рассмотреть и процессы высших порядков.

Нелинейное взаимодействие «волна-волна» и «волна-частица». Основные свойства. Возможности экспериментального наблюдения

Квазилинейная теория последовательно строилась (гл. 4) как приближение первого порядка самосогласованной системы уравнений Власова. Амплитуда шумов E_k использовалась в качестве параметра разложения в динамических уравнениях, соответственно спектральная плотность шумов W_k — в усредненных уравнениях. Далее, в гл. 6, эти уравнения идентифицировались в контексте черенковского взаимодействия — резонансного взаимодействия «частица-квази-частица». Мы могли бы последовать этому алгоритму при исследовании высших порядков теории возмущений, но на таком пути мы встретились бы с гораздо более громоздкими вычислениями. Поэтому следующий шаг сделан будет иначе. В настоящей главе мы остановимся на некоторых общих, наиболее фундаментальных свойствах нелинейных процессов, а затем в следующей главе будут даны два примера подробных вычислений.

7.1. Распадные процессы

Прежде всего, попробуем представить себе распадное взаимодействие. Интересно, что один такой пример знаком любому инженеру-электронщику. При настройке обычного радиоприемника на заданную длину волны (для случая наиболее распространенных супергетеродинных схем) меняется, собственно, частота генератора. Генератор порождает колебания, которые «смешиваются» с сигналом на входе, давая в результате биения. Далее эти биения детектируются, усиливаются и т. д. Частота биений отвечает условию

$$\Omega = \omega_s \pm \omega_g, \quad (7.1)$$

где ω_s — частота принимаемого сигнала, а ω_g — частота генератора.

Другой пример, скорее знакомый физикам, — рамановское рассеяние. Простейший сценарий этого эффекта таков. При облучении молекулярного ансамбля с собственной молекулярной частотой Ω электромагнитной волной с частотой ω наблюдаются рассеянные волны с комбинационными частотами $\omega \pm \Omega$, т.е. красные и фиолетовые сателлиты падающей волны. Красный сателлит (знак «—») более интенсивен, потому что фиолетовый может излучаться только при взаимодействии облучающей волны с уже возбужденными молекулами, снимая возбуждение и тем самым формируя сателлит $\omega + \Omega$.

На языке волновой механики такое взаимодействие есть не что иное, как генерация биений суммарного или разностного типа. На языке квазичастичного формализма это просто распад или, наоборот, слияние квазичастиц (рис. 7.1). В последнем случае резонансные условия имеют смысл законов сохранения:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad \omega_1 = \omega_2 + \omega_3. \quad (7.2)$$

Реальные частицы плазмы непосредственно в элементарном акте распада участия не принимают, но лишь через посредство участия в осцилляторном движении. Как следствие гидродинамическое описание таких процессов оказывается в большинстве случаев абсолютно корректным. (Исключения, конечно, возможны, прежде всего в существенно немаксвелловской плазме.)

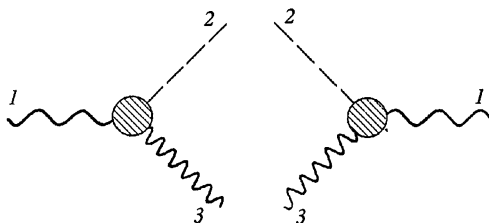


Рис. 7.1. Трехплазмонные процессы

Мы будем называть волновую моду в плазме распадно-неустойчивой, если оба условия (7.2) удовлетворяются одновременно в рамках одномодового рассмотрения. (Под одномодовым в данном случае подразумевается режим не монохроматической волны, но некоторый волновой спектр — быть может, и со случайными фазами, — сформированный единственным типом квазичастиц.) В обратном случае мы будем называть спектр распадно-устойчивым.

Первое из уравнений (7.2) означает, в частности, что все волновые векторы \mathbf{k}_i лежат в одной плоскости. Рис. 7.2 демонстрирует реализацию обоих условий (7.2) при учете еще одного обстоятельства: $\omega_1 = \omega(\mathbf{k}_1)$. На рис. 7.3 показаны два простых примера изотропной зависимости $\omega(\mathbf{k})$ — в немагнитной неоднородной плазме. Можно

видеть, что зависимость $\omega(\mathbf{k})$ на рис. 7.3б, которая примерно соответствует ионно-звуковым волнам, распадно-устойчива. На первый взгляд, распадно-неустойчивыми должны быть ленгмюровские волны, потому что их параболический закон дисперсии $\omega(\mathbf{k})$ подобен распадному спектру, изображенному на рис. 7.3а. Необходимо, однако, обратить внимание на слагаемое ω_{pe} в уравнении (2.18) и на то, что условие $kr_{De} \ll 1$ препятствует спектру $\omega(\mathbf{k})$ содержать частоты, большие (и даже порядка) $2\omega_{pe}$. Как следствие второе из условий (7.2) не может быть удовлетворено в рамках одной только ленгмюровской моды. В общем случае оказывается, что устойчивость к распаду гораздо более типична для плазменных волн и нарушается обычно в достаточно сильных магнитных полях. (Особый случай, выходящий за рамки слабой турбулентности, — модификация самого закона дисперсии при больших амплитудах.) И тем не менее, трехволновые процессы играют обычно весьма заметную роль в различных слаботурбулентных сценариях, но включая при этом сразу две или три плазменных моды в каждом эле-

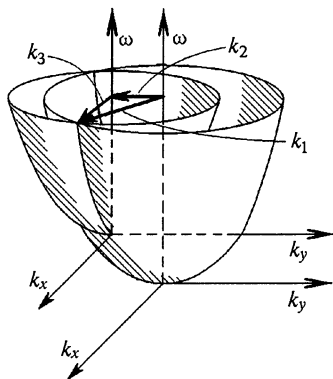


Рис. 7.2. Геометрия условий распада

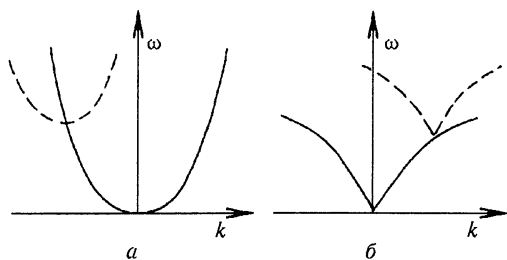


Рис. 7.3. Два примера изотропных спектров $\omega(k)$: а — распад разрешен, б — распад запрещен

ментарном акте. Для примера рассмотрим взаимодействие ленгмюровских волн с ионным звуком $l + s \rightarrow l$. Предположим, что на рис. 7.1 $1 \Leftrightarrow 1, 2 \Leftrightarrow s, 3 \Leftrightarrow l$ и, таким образом, $\omega_1 \cong \omega_3 \cong \omega_{pe}, \omega_2 \ll \omega_{pe}$. Как мы знаем, $k_1, k_3 \ll r_{De}^{-1}$, так что $k_s \leq k_1 + k_3 \ll r_{De}^{-1}$, а значит, $\omega_s \ll \omega_{pi}$. Для ленгмюровских волн отсюда следует квазиупругое рассеяние, похожее скорее на бриллюэновское, нежели на рамановское. Оно играет определенную роль в различных сценариях турбулентного нагрева плазмы и, в частности, в динамике нагрева лазерной короны. На

рис. 7.4 представлены пять примеров, в принципе наблюдаемых и действительно наблюдавшихся экспериментально. Остановимся на этих конкретных примерах.

Рис. 7.4а — процесс коллективного электромагнитного излучения из плазмы с заметным уровнем ленгмюровской турбулентности.

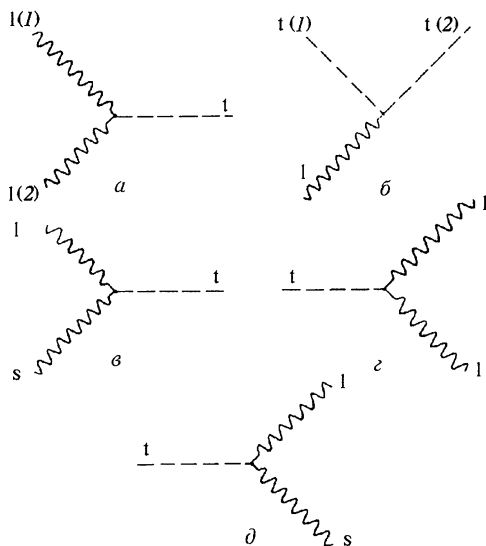


Рис. 7.4. Трехволновые процессы в турбулентной плазме

Частота поперечных волн, излученных из плазмы, примерно равна двойной ленгмюровской частоте $2\omega_{pe}$. Это открывает возможность бесконтактного измерения плотности плазмы. Как известно, $\omega_t = (\omega_{pe}^2 + k_t^2 c^2)^{1/2}$; следовательно, у поперечной волны $k_t \approx \omega_{pe}/c$, а значит, и у ленгмюровской волны $k_l \approx \omega_{pe}/c$. Единственное исключение, т.е. $k_l \gg \omega_{pe}/c$, возможно при $\mathbf{k}_{l(1)} \cong -\mathbf{k}_{l(2)}$. Таким образом, только длинноволновая (а по сути — непотенциальная) часть ленгмюровского спектра может быть диагностирована на основе этого процесса, а также — и это самое важное — изотропные ленгмюровские спектры безотносительно к длине волны.

Рис. 7.4б — процесс «рамановского» рассеяния внешней электромагнитной волны на ленгмюровских шумах плазмы. Следствием его оказываются «красные» ($\omega - \omega_{pe}$) или «фиолетовые» ($\omega + \omega_{pe}$) сателлиты в зависимости от геометрии задачи или параметров падающей волны. Чтобы облегчить интерпретацию экспериментальных данных, а также получить по возможности максимальную эффективность такого взаимодействия, полезно брать частоту облучающей волны порядка ω_{pe} и, соответственно, анализировать только фиоле-

товый спутник. По интенсивности или угловому распределению рассеянных волн можно судить, хотя бы грубо, о параметрах плазменной турбулентности. С этой целью используются высокие радиочастоты ($\omega \approx 10^{11} - 10^{12} \text{ c}^{-1}$) для диагностики плазмы в ловушках или свет лазера оптического диапазона для систем инерциального ядерного синтеза. Помимо общего для всех диагностических систем такого рода недостатка — непрямого измерения исследуемых спектров, данный метод имеет еще один, обусловленный довольно низкой эффективностью взаимодействия. С другой стороны, он может быть скомпенсирован достаточно высокой мощностью диагностического лазера; к тому же, следует признать, что методов диагностики мишенной плазмы вообще не так уж много.

Рис. 7.4 представляет электромагнитное излучение из турбулентной плазмы, в которой возбуждены одновременно как ленгмюровская турбулентность, так и ионно-звуковая. Соответственно частота его должна быть близка к ω_{pe} . Это означает, что $k_t \ll \omega_{pe}/c$, т.е. $\mathbf{k}_t \cong \cong -\mathbf{k}_s$. Конечно, так можно получать сколько-нибудь осмысленную информацию лишь об изотропных спектрах или о «звуковой», т.е. длинноволновой, части спектра, у которой $\langle k_s \rangle \leq \langle k_t \rangle \ll r_{De}^{-1}$. С другой стороны, очень удобно только из измерений линий $2\omega_{pe}$ и ω_{pe} в коллективном излучении плазмы сделать немедленно какие-то оценки относительно уровня ленгмюровских и ионно-звуковых шумов. Хотя мы и повторяем все время о трудностях и недостатках подобной турбулентной диагностики, следует все же помнить, что измерение шумов плазмы, особенно в диапазоне коротких потенциальных волн, представляет собой чрезвычайно трудную экспериментальную задачу.

Конечно, диаграммы рис. 7.4а–в должны быть дополнены обратными процессами; кроме того, в случае рис. 7.4б должна быть, вообще говоря, добавлена еще одна пара диаграмм, чтобы учесть одновременно и красный, и фиолетовый спутники. В случаях рис. 7.4а и 7.4в изображены доминирующие процессы, определяющие эволюцию спектра в итоге. Но могут иногда доминировать и обратные процессы — соответствующие диаграммы показаны на рис. 7.4г, д.

Рис. 7.4г дает нам пример лазерной накачки. Он может быть существен в системах лазерного УТС, по крайней мере в системах прямого облучения (direct drive). Этот распад волны накачки происходит в области концентраций $n_{cr}/4$, где n_{cr} — критическая плотность. Поясним, что это значит. Если поперечная электромагнитная волна

$$\omega_t = (k^2 c^2 + \omega_{pe}^2)^{1/2} \quad (7.3)$$

распространяется в неоднородной плазме, она не может достичь областей, где локальная плазменная частота превышает частоту поперечной волны ω_t (так как $\omega = \text{const}$; см. гл. 4). Поэтому, стартуя снаружи, электромагнитный квант обязан развернуться (т.е. быть

отражен) не позже, чем по достижении области, где $\omega_{pe\ cr} = \omega_1$, иначе говоря, $n = n_{cr} \equiv m\omega_1^2/(4\pi e^2)$. Этот предел может быть достигнут лишь в случае нормального падения по отношению к поверхностям уровня плотности, например в случае сферической симметрии — при радиальном распространении луча по направлению к центру мишени. При косом падении отражение происходит при меньшей плотности. Но распад, если он действительно происходит, обусловлен, как можно судить по рис. 7.4г, равенством $\omega_1 \cong 2\omega_{pe}$ или, что то же, $n \cong n_{cr}/4$. Таким образом, при нагреве плазмы мощным лазером поверхность $n \approx n_{cr}/4$ оказывается как раз областью накачки. По мере генерации ленгмюровские плазмоны покидают резонансную область, но не могут уйти из плазменной короны. В конечном счете их энергия оказывается трансформированной в тепловую — таким образом и осуществляется нагрев мишени.

Рис. 7.4д — тоже характерный процесс для систем прямого облучения. Но он может происходить уже лишь непосредственно в области критической плотности, так как $\omega_s \ll \omega_1$, а значит, $\omega_1 \cong \omega_1$. Это также один из важных механизмов нелинейной накачки, а тем самым — нагрева плазмы.

Именно лазерный нагрев плазмы будет нам не слишком удобен для дальнейшего обсуждения. Дело в том, что мы уже перешли на язык приближения случайных фаз, а свет лазера — если его не преобразуют специально в некогерентный — так рассматривать нельзя. Грубо говоря, он представляет собой монохроматическую синусоидальную волну (быть может, двух- или трехмодовую). Трехволновые процессы с участием лазерной волны следует рассматривать на языке параметрической неустойчивости с обязательным учетом эволюции фаз. Уравнения, описывающие такие процессы, обычно выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} = C_i^{jk} A_j A_k^+, \quad (7.4)$$

где A_α — комплексная амплитуда моды номер α , а матричный элемент C_i^{jk} включает не только интенсивность взаимодействия, но и все законы сохранения. В принципе этот формализм тоже может быть переведен на язык квазичастиц — как уже отмечалось, монохроматическая волна может рассматриваться как Бозе-конденсат плазмонов. Намного лучше, однако, анализировать уравнение (7.4) непосредственно в такой простейшей форме. Сейчас мы не станем на этом задерживаться, поскольку в следующей главе уравнение такого типа появится у нас в ходе вычислений.

Уравнения, соответствующие излучению из турбулентной плазмы (процессы на рис. 7.4а и в), могут быть в общем виде получены в рамках модели квазичастиц, по крайней мере для случая, когда

роль источника турбулентности играет кинетическая неустойчивость. Для примера рассмотрим процесс на рис. 7.4в. Более детально он изображен на рис. 7.5. Нетрудно сразу же написать уравнение для числа электромагнитных квантов (назовем их t -плазмоны), учтя как прямой, так и обратный процессы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_q^t}{\partial t} &= \sum_{\mathbf{k}} Q(\mathbf{k}, \mathbf{q}) [(N_q^t + 1) N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^s - N_q^t (N_{\mathbf{k}}^l + 1) (N_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^s + 1)] = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^s - N_q^t N_{\mathbf{k}}^l - N_q^t N_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^s); \quad (7.5) \end{aligned}$$

$$Q(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \sim \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \sim \delta(\Omega_{\mathbf{q}} - \omega_{\mathbf{k}} - \omega_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}),$$

где $\omega = \omega_1(\mathbf{k})$, $\Omega = \omega_1(\mathbf{q})$, $\Omega - \omega = \omega_s(\mathbf{q} - \mathbf{k})$, законы сохранения включены непосредственно в коэффициенты Q и ω и, кроме того, содержатся непосредственно в архитектуре самого уравнения (7.5).

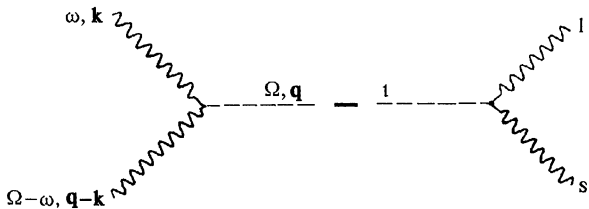


Рис. 7.5. Баланс распада $t \rightarrow l + s$

Вероятности обозначены разными буквами, потому что они различны по размерности: в промежуточном равенстве (7.5) мы положили величину $N_{\mathbf{k}}^{\alpha}$ безразмерной, как и в уравнении (6.5), тогда как в конечной формуле мы подразумеваем $N_{\mathbf{k}}$ определенным так же, как и в (4.43), поскольку это более удобно. Особо отметим, что мы не могли бы сразу же пренебречь единицами в промежуточной формуле, но лишь после того, как был сокращен промежуточный кубический член. Это вообще особенность распадных диаграмм: будучи формально кубическими относительно плотности (плотностей) энергии волн, они в итоге отвечают процессам всего лишь второго порядка — следующего по отношению к квазилинейной теории.

Если мы предположим плазменную систему замкнутой (или бесконечной, или, скажем, окруженной зеркалами), то в рамках (7.5) может быть реализовано стационарное состояние:

$$N_{\mathbf{k}}^l N_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^s - N_q^t N_{\mathbf{k}}^l - N_q^t N_{\mathbf{q}-\mathbf{k}}^s = 0. \quad (7.6)$$

Все решения (7.6) обеспечивают стационарность (так же, как максвелловская функция обращает в нуль интеграл столкновений). Интересно отметить, что некоторого рода стационарное состояние мо-

жет быть реализовано даже в рамках динамических уравнений (7.4), но при этом амплитуды слегка осциллируют около среднего уровня. Мы обращаем внимание на это фундаментальное свойство распадных уравнений, но вообще-то нам более интересен иной случай, а именно $N^t \ll N^l, N^s$. Он может реализоваться (и в самом деле реализуется) в оптически тонких плазмах, когда все рожденные в плазме поперечные кванты высвечиваются наружу. Тогда в области взаимодействия мы можем положить N^l пребывающим практически на уровне флуктуаций. Что касается производной $\partial N^l / \partial t$, представляется разумным заменить ее величиной $\mathbf{Q}_q = \int (\partial N_q^l / \partial t) d^3 \mathbf{r}$, где \mathbf{Q} — полный поток энергии в окружающее пространство, а интегрирование выполняется по объему плазмы. Получаем такое уравнение:

$$\mathbf{Q} = \int d^3 \mathbf{r} \int d\mathbf{k} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) N_k^l N_{q-k}^s \approx \int d^3 \mathbf{r} W^l W^s.$$

Этот постоянный во времени поток может быть непосредственно измерен. Чем более однородно плазменное облако, тем уже линия электромагнитного излучения ω_{pe} . Дополнив этот результат данными измерения потока $\mathbf{Q}' \approx \int d^3 \mathbf{r} (W^l)^2$, соответствующего линии $2\omega_{pe}$, можно оценить обе величины W^s, W^l . Нередко эта возможность оказывается единственной более или менее надежной информацией.

В обратном случае $N^l \gg N^l, N^s$ получаем так называемую распадную неустойчивость:

$$\frac{\partial N_q^l}{\partial t} = -N_q^l \sum_{\mathbf{k}} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) (N_{q-\mathbf{k}}^s + N_{\mathbf{k}}^l). \quad (7.7)$$

Условие применимости формулы (7.7) соответствует, например, достаточно сильному затуханию как ленгмюровских, так и ионно-звуковых волн; существуют и другие возможности реализации такого режима. Все же многообразие распадных процессов довольно трудно себе представить.

В дополнение к обычным трехплазмонным процессам, изображенным на рис. 7.4, существует еще один совершенно особый класс процессов такого рода, но только в неравновесной плазме. Речь идет о трехволновых процессах с участием волн с отрицательной энергией. Чтобы представить себе такую моду, давайте рассмотрим произвольную волну в плазме — неважно, какую именно, — но в движущейся системе отсчета. Согласно классической нерелятивистской формуле Доплера, $\omega' = \omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{k}\mathbf{v}$, мы можем так выбрать систему отсчета, что знак частоты изменится. Изменит ли это хоть что-нибудь в сценариях процессов на рис. 7.4? Никким образом. Это представляется достаточно очевидным с точки зрения принципа относитель-

ности и легко может быть проиллюстрировано на базе уравнений (7.2). В самом деле,

$$\omega'_1 - \omega'_2 - \omega'_3 = \omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3)\mathbf{v} \equiv 0. \quad (7.8)$$

С другой стороны, мода с отрицательной плотностью энергии может существовать даже и в лабораторной системе отсчета. Рассмотрим в качестве примера низкочастотные волны ионно-звукового типа в двухпотоковой плазме, образованной двумя сталкивающимися плазмами или встречными потоками. Диэлектрическая проницаемость плазмы в низкочастотном пределе может быть представлена в форме:

$$\varepsilon = 0 = 1 + (kr_{De})^{-2} - \frac{1}{2} \omega_{pi}^2 (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^{-2} - \frac{1}{2} \omega_{pi}^2 (\omega + \mathbf{k}\mathbf{v})^{-2}. \quad (7.9)$$

При условии $v \ll v_{Te}$ электронный член (второй в правой части) не зависит от \mathbf{v} . Для удобства рассмотрим идентичные потоки, определяя ω_{pi} и r_{De} через полную электронную концентрацию.

Одномерная картинка дисперсионных кривых представлена на рис. 7.6. Вообще говоря, существуют четыре вещественных решения уравнения (7.9). Два из них (1 и 3) могут исчезать; в этом случае

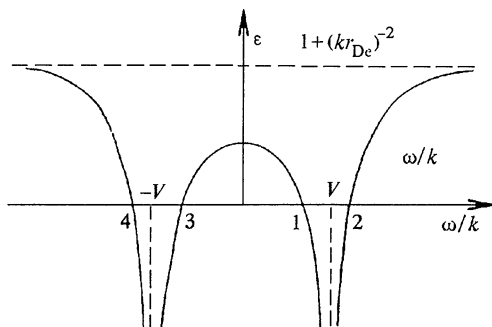


Рис. 7.6. Диэлектрическая проницаемость двухпотоковой плазмы

наша система неустойчива по отношению к низкочастотным возмущениям. Эта неустойчивость очень близка к пучковой гидродинамической неустойчивости. Ее можно трактовать как аномальный эффект Доплера или — с должной осторожностью — как черенковское возбуждение акустических волн. Если система оказывается под порогом неустойчивости, эти два исчезающих решения появляются в форме вещественных корней. Можно видеть, однако, что по своим свойствам решения 1 и 3 заметно отличаются от стандартной волны в плазме. Для них характерно достаточно «экзотическое» свойство волновой энергии:

$$W_k = \omega \frac{d\varepsilon}{d\omega} |E|^2 \frac{1}{8\pi} < 0. \quad (7.10)$$

Это означает, например, что возбуждение таких волн имеет следствием нагрев частиц, а черенковское затухание — их охлаждение. Столкновения должны приводить не к затуханию, но к возбуждению волн с отрицательной энергией. В общем, можно утверждать, что возбуждение волн с отрицательной энергией приближает систему к термодинамическому равновесию.

В рамках теории слабой турбулентности можно корректно учесть (7.10), положив $N_{\mathbf{k}} < 0$ или $\omega_{\mathbf{k}} < 0$. Оба подхода равноправны; прием в качестве рабочего второй из них. Тогда законы сохранения для трехплазмонного взаимодействия (7.2) можно представить в очень удобной форме:

$$\sum \omega_{\mathbf{k}} = 0, \quad \sum \mathbf{k} = 0. \quad (7.11)$$

Уравнения (7.11) с должным знаком входящих и выходящих волн суть общие уравнения такого рода (см. диаграммы на рис. 7.7). Интересно отметить, что в таком виде становится очевидной их нечувствительность к эффекту Доплера — второе условие обращает в нуль поправку к первому. В такой форме их можно распространить и на волны с отрицательной энергией, и тогда оказывается возможным одновременное рождение либо исчезновение резонансных триплетов.

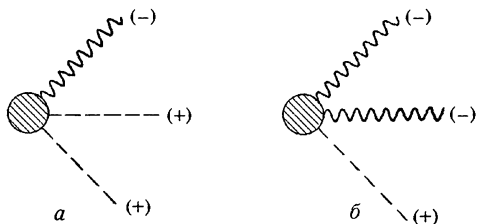


Рис. 7.7. Два примера взрывных процессов

В силу отмеченной нечувствительности к доплер-эффекту при этом в любой системе отсчета полная энергия трех квантов будет равна нулю. Примеры такого рода показаны на рис. 7.7. Любопытный вид принимает уравнение, описывающее трехплазмонные процессы. Вывод его, согласно приведенным выше рецептам, мы предлагаем читателю в качестве упражнения, а здесь приведем конечный результат, общий для процессов, соответствующих любой из диаграмм 7.7а, б:

$$\frac{dN_{\mathbf{k}}^1}{dt} = \sum_{\mathbf{k}'} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{k}') [N_{\mathbf{k}'}^2 N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^3 + N_{\mathbf{k}}^1 N_{\mathbf{k}'}^2 + N_{\mathbf{k}}^1 N_{\mathbf{k}-\mathbf{k}'}^3]; \quad (7.12)$$

совершенно аналогичные уравнения для $N_{\mathbf{k}}^2, N_{\mathbf{k}}^3$. Эти уравнения описывают новый для нас эффект — так называемую взрывную неустойчивость. Свойства ее весьма интересны. Плотность шумов формально обращается в бесконечность за конечное время. Чтобы понять это, рассмотрим отдельный резонансный триплет. По мере

того, как акт «совместного рождения» повторяется много раз, становится совершенно неважным, каковы были числа волн каждой моды в начальном состоянии. Тогда приближенно можно положить

$$N^\alpha = N^\beta = N^\gamma \equiv N, \quad \frac{dN}{dt} = \omega N^2. \quad (7.13)$$

Точное решение уравнения (7.13):

$$N = 1/[\omega(t_0 - t)],$$

где t_0 — формальный момент сингулярности. Разумеется, в эксперименте плотность шумов бесконечной быть не может, более того, реальная плазма не бывает даже по-настоящему сильнотурбулентной ($W \sim nT$); при этом, как уже говорилось, произошло бы пересечение траекторий. Существует ряд механизмов, которые могут стабилизировать взрывную неустойчивость: уход шумов из резонансной области, нелинейное насыщение, а в особенности — стимулированная расстройка фазового резонанса триплетов. В любом случае неравновесная система не сможет избежать конечной термализации, но сам ее сценарий, оказывается, может быть очень нетривиальным.

Хотя отрицательная энергия волн и следующая из нее взрывная неустойчивость и выглядят несколько экзотичными с точки зрения «повседневной» физики, они вполне могут быть идентифицированы экспериментально (Аранчук и др., 1976 г.).

Мы коснулись лишь некоторых характерных черт распадных процессов. Вероятно, исключительно этим эффектам стоило бы посвятить отдельную книгу. Но нам не следует слишком перегружать ту или иную тему в данной книге ввиду опасности потерять вообще какой-либо из «кирпичиков» нашего нелинейного сооружения.

7.2. Индуцированное рассеяние

Термин «индуцированное рассеяние» сам по себе, быть может, не так уж удачен. Но альтернативный — «нелинейное затухание Ландау» —

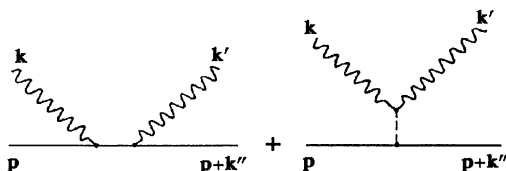


Рис. 7.8. Индуцированное рассеяние

и вовсе никуда не годится. Во-первых, этот процесс, как правило, не соответствует никакому настоящему затуханию. Во-вторых, при таком названии есть опасность перепутать индуцированное рассеяние с совершенно иным процессом, описанным в главе 3.

О чем мы говорим в данном случае, можно понять из рис. 7.8. Рассматривается нелинейный диссипативный процесс индуцирован-

ного рассеяния волн частицами плазмы — электронами или ионами. При вычислении амплитуды процесса необходимо просуммировать две диаграммы, которые можно интерпретировать как нелинейный комптон-эффект и затухание Ландау биений двух взаимодействующих волн. Этот второй процесс и в самом деле можно было бы назвать нелинейным затуханием Ландау. Если в результате взаимодействия происходит генерация биений с частотой и волновым вектором соответственно

$$\omega'' = \omega - \omega', \quad \mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$$

и если эти биения сами оказываются собственной модой, они начинают жить в плазме собственной жизнью — и это сценарий трехплазмонного процесса. Если же вместо этого они попадают в область черенковского резонанса

$$\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v} = 0, \quad (7.14)$$

собственной жизни у них быть не может, но они способствуют эффективной связи между порождающими их волнами. Нетрудно убедиться (подобно тому, как мы это делали в случае черенковского резонанса), что и комптоновское рассеяние при нерелятивистской передаче импульса удовлетворяет тому же условию. На рис. 7.8 обе диаграммы имеют одинаковые правую и левую часть (вход и выход), а значит, как обычно в таких случаях, должны быть просуммированы еще до вычисления вероятности.

В первом из процессов на рис. 7.8 участвует виртуальный электрон (линия между актами поглощения и излучения), а во втором соответственно — виртуальный плазмон. Что это может означать в классической (т. е. некантовой) физике? Попробуем прояснить ситуацию, что, вообще говоря, полезно не только для нашего курса, но и для понимания квантовой теории поля.

Если биения двух волн — собственные моды, они могут покидать область пересечения порождающих волн, излучаться, распространяться и вообще вести себя, как должны вести себя реальные (квази)частицы — это и отражено на диаграммах рис. 7.1, 7.4, 7.5. В противном случае это несобственные моды, которые могут существовать лишь в области перекрытия как вынужденные колебания. Их частота и волновой вектор заданы первичными волнами, например $\omega'' = \omega - \omega'$, $\mathbf{k}'' = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$, но закон дисперсии собственных мод $\omega(\mathbf{k})$ не выполняется для ω'' и \mathbf{k}'' . Иногда виртуальные частицы в квантовой теории рассматриваются как нарушающие — в рамках соотношения неопределенностей — законы сохранения импульса и энергии. Но в квантовой электродинамике чаще встречается другая трактовка, более конструктивная, — энергия и импульс в точности сохраняются, но для виртуальных частиц нарушается закон дисперсии: $p_i p_i \neq -mc^2$. Но это как раз то же, что

мы говорили о несобственных модах. Значит, можно сказать, что в случае виртуальной (квази)частицы нарушено соотношение $\mathcal{E}(\mathbf{p})$ или $\omega(\mathbf{k})$, потому что она не свободна, но находится в поле других (квази)частиц. Но за время своей короткой жизни она может взаимодействовать с другими (квази)частицами. Так, биение двух волн на правой диаграмме рис. 7.8 взаимодействует с электронами или ионами, следствием чего являются эволюция спектра и нагрев частиц. Так же можно подходить и к комптон-эффекту, представляя его как два последовательных черенковских процесса, каждый раз — с участием виртуальной частицы. (В вакуумном случае, когда черенковский процесс запрещен, это как раз и обеспечивает выполнение законов сохранения.) Может возникнуть вопрос, как это падающая (\mathbf{k}) и рассеянная (\mathbf{k}') волны могут образовать биения, когда \mathbf{k}' возникает сама в результате рассеяния, как бы уже после акта рассеяния. Но, во всяком случае, для нас этот момент несуществен, потому что наш «элементарный» акт отличается от такового в квантовой электродинамике — мы ведь имеем дело с индуцированными процессами, к тому же, наши волны в любом случае заранее существуют в виде тепловых флуктуаций. При взаимодействии происходит усиление волн от начального уровня, так что весь описанный выше механизм работает непрерывным образом.

Особого внимания заслуживает следующее свойство индуцированного рассеяния: оно почти никак не ограничено законами сохранения импульса и энергии. В самом деле, в уравнении (7.14) достаточно свободных параметров, чтобы удовлетворить им без затруднений, чего не скажешь, например, об уравнении (7.2). Даже если трехволновые процессы участвуют в нелинейном сценарии не в том виде, который мы рассматриваем, а в форме параметрических неустойчивостей, когда они имеют меньший порядок по нелинейности, индуцированное рассеяние зачастую оказывается вполне конкурентноспособным, а уж процессы высших порядков заведомо подключаются лишь после установления баланса, включающего индуцированное рассеяние. Это специфично именно для плазменной турбулентности или нелинейной физики плазмы, и это не всегда правильно понимается специалистами по нелинейной физике, впервые взявшимися за плазменные задачи.

Выведем кинетическое уравнение для волн (именно так его и принято называть) для этого случая или, вернее сказать, для процессов такого класса. Дело в том, что аналогичную черенковскому резонансу роль в подобном процессе мог бы сыграть и циклотронный резонанс, но мы ради простоты модели не включаем в рассмотрение магнитное поле. Оба процесса, прямой и обратный, представлены на рис. 7.9. Каждая из диаграмм при этом есть сумма двух на рис. 7.8. Как мы уже знаем, постоянную Планка мож-

но с самого начала приравнять единице. Но, в отличие от распадов, здесь мы можем безболезненно положить сразу же $N_k \gg 1$. Все прочие детали мало отличаются от таковых в главе 6. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} &= \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \omega(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}) \times \\ &\times [-N_k(1 + N_{k'})f_p(1 - f_{\mathbf{p}+\mathbf{k}''}) + N_{k'}(1 + N_k)f_{\mathbf{p}+\mathbf{k}''}(1 - f_p)] \cong \\ &\cong \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{k}} \tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}) N_k N_{k'} \left(\mathbf{k}'' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \right). \quad (7.15) \end{aligned}$$

Что касается эволюции частиц, она описывается практически так же, как и в квазилинейном случае, — см. рис. 6.5 и всю проце-

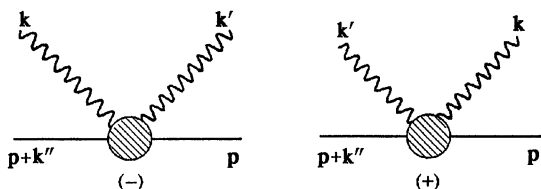


Рис. 7.9. Баланс индуцированного рассеяния

дуру, приводящую к уравнению (6.10). Предлагаем читателю этот вывод в качестве упражнения, а результат его оказывается следующим:

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \tilde{\omega}(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \mathbf{k}') \delta(\omega'' - \mathbf{k}''\mathbf{v}) N_k N_{k'} k_\alpha'' k_\beta'' \frac{\partial f}{\partial p_\beta}. \quad (7.16)$$

Во многих случаях эволюция спектра частиц оказывается из-за нелинейности затянута в сравнении со спектральной эволюцией шумов. Это особенно часто происходит именно в случае нелинейной диффузии (7.16) (а диссипативные процессы более высоких порядков обычно вообще несущественны — помимо прочих причин, характерные времена плазменных экспериментов для них слишком малы). Эта диффузия заметно медленнее, нежели квазилинейная. В самом деле,

$$D_{ss}/D_{ql} \approx W/nT \ll 1, \quad (7.17)$$

так как $D_{ss} \sim (W/nT)^2$. Правда, в некоторых ситуациях она остается существенной (см. ниже).

Следующий вопрос: почему мы одновременно не рассматриваем родственных процессов парного затухания или совместного рождения, показанных на рис. 7.10а, б? Чтобы на него ответить, обратимся к уравнениям (7.14) и (7.15). Уравнение (7.14) налагает не

слишком строгие ограничения — только лишь $\omega'' \leq k'' v_T$, где v_T — тепловая скорость резонансных частиц. Это условие того, чтобы темп спектральной эволюции, следующий из уравнения (7.15), не оказался экспоненциально мал. Таким образом, условие достаточной эффективности перекачки волн из некоторой моды i в некоторую моду f через рассеяние на частицах сорта α (не путать с α -частицами) может быть представлено в виде

$$(\omega_i - \omega'_f) / |\mathbf{k}_i - \mathbf{k}'_f| \leq v_{T\alpha}. \quad (7.18)$$

А если бы мы написали подобное условие для диаграмм, представленных на рис. 7.10, то надо было бы взять противоположный знак:

$$(\omega_i + \omega'_f) / |\mathbf{k}_i + \mathbf{k}'_f| \leq v_{T\alpha}. \quad (7.19)$$

Существует множество примеров, когда можно удовлетворить условию (7.18), но очень мало, когда удается выполнить (7.19). Как

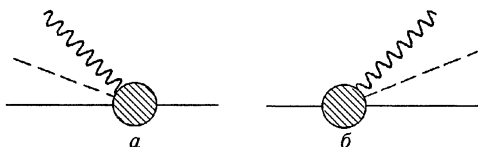


Рис. 7.10. Парное затухание Ландау

правило, (7.19) и тем самым процесс типа изображенного на рис. 7.10 могут реализоваться только для некоторых мод во внешнем магнитном поле или в сильно неравновесной плазме с одновременным участием волн с положительной и отрицательной энергией, но не в ординарных случаях. Существует, впрочем, одно исключение. Это рассеяние ленгмюровских волн на электронах плазмы с переизлучением в коротковолновый ионный звук (ионные плазменные колебания). Действительно, $\omega_s \ll \omega_{pe} \approx \omega_i$; далее, для ионных плазменных волн $k_s \geq 1/r_{De} \gg k_i$; следовательно,

$$\omega''/k'' \cong \omega_{pe}/k_s \leq v_{Te}.$$

Между прочим, эффективность этого процесса достаточно высока, чтобы он мог играть заметную роль в турбулентной динамике плазмы.

Вернемся к общему виду процессов индуцированного рассеяния. Следует обратить внимание на то, что (7.15) заметно отличается по своей нелинейной структуре от уравнения (7.5). В самом деле, уравнение (7.15) можно переписать в форме, близкой к уравнению для затухания Ландау, но только с нелинейным инкрементом:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = 2\gamma_{\mathbf{k}}^N N_{\mathbf{k}}, \quad \gamma_{\mathbf{k}}^N = \sum_{\mathbf{k}'} Q_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} N_{\mathbf{k}'}. \quad (7.20)$$

Мы предположили эволюцию частиц достаточно медленной, чтобы можно было просто проинтегрировать по \mathbf{v} в (7.15). Для простоты мы полагаем также здесь и далее, что процесс нелинейного рассеяния включает волны лишь одного типа в начальном и конечном состояниях. Просто поглядев на рис. 7.8 и 7.9, легко понять, что в этом случае полное число квазичастиц, сохраняясь в каждом элементарном акте, остается и в целом постоянным. Отсюда следует:

$$\sum_k \frac{\partial N_k}{\partial t} = \sum_{k, k'} Q_{k, k'} N_k N_{k'}. \quad (7.21)$$

Уравнение (7.21) должно быть справедливо для произвольного спектра N_k , что в общем случае означает

$$Q_{k, k'} = -Q_{k', k}. \quad (7.22)$$

В частности, $Q_{k, k} = 0$. К тому же, $Q_{0, k} = 0$. В случае почти равновесного распределения частиц можно ожидать, что частицы в процессе рассеяния могут только нагреваться. Тогда волны обязаны в процессе рассеяния «краснеть». Отсюда сразу следует

$$Q_{k, k'} > 0, \quad \text{если} \quad \omega(\mathbf{k}) < \omega(\mathbf{k}'). \quad (7.23)$$

Пара диаграмм на рис. 7.8 формирует амплитуду процесса индуцированного рассеяния. Во многих случаях из них существенной оказывается только вторая, а нелинейный комптон-эффект оказывается, при том же порядке нелинейности, меньше в силу какого-то количественного фактора. Но заранее предвидеть этого нельзя. Скажем, в наиболее, казалось бы, «хрестоматийном» случае индуцированного рассеяния ленгмюровских волн на электронах плазмы эти два канала входят в амплитуду с разным знаком и почти полностью компенсируют друг друга, понижая полную вероятность фактором порядка $(\langle k \rangle r_{De})^2$.

Как мы уже отмечали, трехплазмонное взаимодействие требует различного описания в зависимости от того, случайными или регулярными являются фазы взаимодействующих волн. В случае индуцированного рассеяния все оказывается гораздо проще. Частицы как хаотический компонент хаотизируют и весь процесс в целом, так что эффект описывается одними и теми же уравнениями вне зависимости от степени когерентности взаимодействующих волн. Эффект захвата в этом порядке теории возмущений обычно оказывается несущественным.

Нелинейное взаимодействие «волна-волна» и «волна-частица». Примеры вычислений

Прямые вычисления матричных элементов для всех уравнений, выведенных в гл. 7, зачастую оказываются совершенно необозримыми, даже в случае, когда нет необходимости перенормировок, т.е. когда амплитуды взаимодействующих волн не слишком велики, а ширина спектральных линий не слишком мала, так что можно пользоваться линейным законом дисперсии, линейными законами сохранения и приближением плоских волн. А с другой стороны, как мы скоро увидим, эти приближения следуют обычно достаточно простой схеме. Поэтому их можно существенно сократить, воспользовавшись принципом соответствия. Для этого сначала нужно получить общий вид кинетического уравнения для волн посредством методов, изложенных в гл. 7. Затем выполняются необходимые вычисления, но с удержанием во всех разложениях только части членов, выделенных своей нелинейной структурой. Иными словами, зная, как будет выглядеть кинетическое уравнение для волн, мы выделяем какое-то одно слагаемое в его правой части и следим только за теми членами разложения, которые сформируют именно это слагаемое. Отсюда находится вероятностный коэффициент, а уже он подставляется в полное кинетическое уравнение для волн. Имеет смысл показать, хотя бы один раз, как это делается.

Для примера возьмем процессы, изображенные на рис. 8.1. В обоих процессах участвуют только продольные (потенциальные) волны, что заметно упрощает вычисления. Более того, для индуцированного рассеяния, изображенного на рис. 8.1б, можно и биевения считать потенциальными волнами — с ними будет связан главный вклад в эффект (доказательством этого факта мы позволим себе пренебречь). Для демонстрации мы ограничимся приближением широких спектров и случайных фаз всех гармоник (см. уравнения (4.1)–(4.6)). Считая, как уже было объявлено, что ли-

нейное приближение пока не нуждается в ревизии, для всех физических величин будем пользоваться соотношением

$$A_k \equiv A_{k\omega} \cong A_k \delta(\omega - \omega_k). \quad (8.1)$$

Будет использована также известная теорема для фурье-разложений:

если $A = BC$, то

$$A_k = \int dk' B_{k'} C_{k-k'} = \iint d\omega' d\mathbf{k}' B_{\mathbf{k}'\omega'} C_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', \omega-\omega'}. \quad (8.2)$$

8.1. Распадные процессы

Все моды, вовлеченные в трехплазмонное взаимодействие, показанное на рис. 8.1, в линейном приближении могут быть описаны на

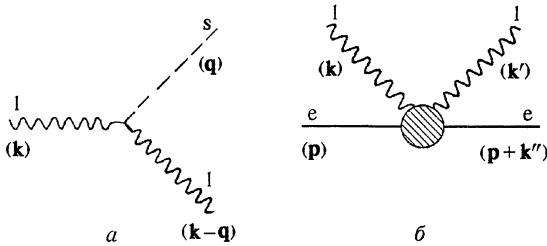


Рис. 8.1. Два нелинейных процесса, избранных для демонстрации вычислительной процедуры

базе уравнений (2.11)–(2.13). В частности, из них следуют такие выражения для фурье-компонент возмущения плотности:

$$n_{ek} = -(e/m)n_0 k^2 \varphi_k / (\omega^2 - 3k^2 v_{Te}) \cong -(e/m)(n_0 k^2 / \omega^2) \varphi_k, \quad (8.3)$$

$$n_{ik} \ll n_{ek},$$

$$n_{iq} = (e/M)n_0 q^2 \varphi_q / (\Omega^2 - 3q^2 v_{Ti}^2) \cong (e/M)(n_0 q^2 / \Omega^2) \varphi_q,$$

$$n_{eq} = -(e/m)n_0 q^2 \varphi_q / (\Omega^2 - q^2 v_{Te}^2) \cong (n_0 e / T_e) \varphi_q$$

(см. также (4.21)). В уравнениях (8.3) можно воспользоваться для упрощения вычислений следующими соотношениями:

$$\mathbf{V}_{0i} = \mathbf{V}_{0e} \equiv \mathbf{0}, \quad Z = 1, \quad n_{0e} = n_{0i} \equiv n_0, \quad T_i \ll T_e,$$

$$\omega/k \gg v_{Te} \gg v_{Ti}, \quad v_{Te} \gg \Omega/q \gg v_{Ti}, \quad \gamma_{e(l)} = \gamma_{i(s)} = 3, \quad \gamma_{e(s)} = 1.$$

В линейном приближении из системы (2.11)–(2.13) следуют уравнения (2.14), (2.15). Вычислим второй порядок теории возмущений. Удобнее всего работать с уравнением (2.13):

$$k^2 \varphi_k = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha k} e_{\alpha} = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha k}^{(1)} + 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha k}^{(2)} e_{\alpha}. \quad (8.4)$$

Левая часть и первый член в правой части уравнения (8.4) могут быть объединены в линейное дисперсионное соотношение

$$k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \varphi_k = 4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha k}^{(2)} e_{\alpha}. \quad (8.5)$$

Линейная дисперсия следует из классического соотношения $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Наш случай слабой турбулентности является слабонелинейным, что дает нам право на такое приближение:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \cong (\partial \varepsilon / \partial \omega)(\delta \omega + i \gamma_N), \quad (8.6)$$

где γ_N отвечает нелинейной эволюции спектра, тогда как вся прочая диссипация уже содержится в линейном дисперсионном уравнении. Подставим (8.6) в (8.5), затем умножим левую и правую части полученного уравнения на некоторую фурье-компоненту $\varphi_{k'}$, а то, что получится в результате, усредним по фазам:

$$\begin{aligned} (\delta \omega_N + i \gamma_N) \frac{\delta \varepsilon}{\delta \omega} k^2 I_k \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \delta(\omega + \omega_k) = \\ = 4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} \langle \varphi_{k'} n_{\alpha k}^{(2)} \rangle. \end{aligned} \quad (8.7)$$

В левой части уравнения (8.7) мы можем идентифицировать спектральную плотность энергии потенциальных волн (ср. с (4.6)). Обратим внимание на выражение для частотного сдвига. Его вещественная часть $\delta \omega_N$ означает просто перенормировку линейного закона дисперсии из-за нелинейного взаимодействия волн, что в нашем случае не так уж и существенно. Что касается γ_N , эту часть можно заменить временной производной, $\gamma_N \cong \frac{1}{2} \partial / \partial t$ ($\frac{1}{2}$ соответствует дифференцированию интенсивности, а не амплитуды). Используя также соотношение $W_k = \omega N_k$, даем первый шаг в направлении к уравнению эволюции спектра:

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \delta(\omega - \omega_k) = -i \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}}{\omega} \langle \varphi_{k'} n_{\alpha k}^{(2)} \rangle. \quad (8.8)$$

С другой стороны, посмотрев на рис. 8.1а, легко сразу же написать

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} = \int d\mathbf{q} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) \delta(\omega_k - \omega_{k-q} - \Omega_q) (N_k N_{k-q} - N_q N_q - N_k N_{k-q}). \quad (8.9)$$

Здесь Ω, \mathbf{q} — соответственно частота и волновой вектор ионного звука. Теперь уже можно видеть, что не все члены в разложении $n^{(2)}$ понадобятся нам в дальнейшем. Выберем, например, первый член в скобках правой части уравнения (8.9) и будем в дальнейшем удерживать лишь те члены, которые дают в итоге входящие туда комбинации полей. Как легко видеть, в результате объем вычислений уменьшается в три раза.

Итак, берем следующую форму нелинейного возмущения концентрации:

$$n_{\alpha k}^{(2)} = \int dq v_{kq}^{\alpha} (\varphi_q \varphi_{k-q} - \langle \varphi_q \varphi_{k-q} \rangle). \quad (8.10)$$

Вычитание корреляции в скобках — очень важный элемент. Если бы этого не было сделано, то в ответе обнаружились бы дополнительные члены, от которых, ввиду их специфики, было бы довольно сложно избавиться. Дело в том, что все усредненные величины должны войти не в осцилляторное, а в усредненное уравнение. Определять они должны не амплитуду фурье-гармоник, а эволюцию фона. Теперь мы можем подставить (8.10) в уравнение (8.8) и переписать последнее в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta(\omega + \omega') \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) = \\ = \int dq Q_{kq} \langle \varphi_{k'} \varphi_q \varphi_{k-q} - \varphi_{k'} \langle \varphi_q \varphi_{k-q} \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (8.11)$$

где $Q_{kq} = -i \sum_{\alpha} v_{kq}^{\alpha} e_{\alpha} / \omega_{\mathbf{k}}$.

В дальнейшем мы обратимся к непосредственному вычислению Q_{kq} , а сейчас продолжим усреднение по фазам. Тройные корреляции в приближении случайных фаз равны нулю, тем более $\langle \varphi_{\mathbf{k}} \rangle = 0$. Чтобы получить ненулевой результат, нужно заменить одну из амплитуд φ ее нелинейным разложением. Какую именно? Правильный ответ: первую. Предлагается следующее упражнение: после того, как все вычисления будут выполнены, убедиться в том, что, если бы мы представили в нелинейной форме любую из величин φ_q или φ_{k-q} , то в итоге получили бы вклад не в первое, а во второе или третье слагаемое в скобках правой части уравнения (8.9). Мы же, как обещали, ограничиваемся лишь третьей вычислений. Объединив (8.5) и (8.10), нетрудно получить:

$$\varphi_{k'}^{(2)} = \frac{4\pi}{k'^2 \varepsilon(\omega' \mathbf{k}')} \int dq' \left(\sum_{\alpha} v_{k'q'}^{\alpha} e_{\alpha} \right) (\varphi_{q'} \varphi_{k'-q'} - \langle \varphi_{q'} \varphi_{k'-q'} \rangle). \quad (8.12)$$

После подстановки (8.12) в (8.11) мы должны будем завершить процедуру усреднения. Прежде всего заметим, что случайность фаз с необходимостью означает расщепление всех корреляций на двойные — единственной усредненной характеристикой волнового поля оказывается его спектральная интенсивность. Далее, лишь пересекающиеся пары амплитуд могут дать ненулевой вклад в ответ, так как корреляции вида $\langle \varphi_{k'}^{(2)} \rangle \langle \varphi_q \varphi_{k-q} \rangle \equiv 0$ происходят как раз из-за разностей в скобках уравнений (8.10)–(8.12). Получаем

$$\langle \varphi_{q'} \varphi_{k'-q'} \varphi_q \varphi_{k-q} \rangle = \langle \varphi_{q'} \varphi_q \rangle \langle \varphi_{k'-q'} \varphi_{k-q} \rangle + \langle \varphi_{q'} \varphi_{k-q} \rangle \langle \varphi_{k'-q'} \varphi_q \rangle. \quad (8.13)$$

Второй член в правой части (8.13) симметричен первому относительно подстановки $q' \rightarrow k' - q'$, следовательно, его можно отбросить, удвоив первый член. Результат:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{q'} \varphi_{k'-q'} \varphi_q \varphi_{k-q} \rangle &= 2I_q I_{k-q} \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{q}' + \mathbf{k} - \mathbf{q}) \times \\ &\times \delta(\Omega' + \Omega) \delta(\omega' - \Omega' + \omega - \Omega) \delta(\Omega - \Omega_q) \delta(\omega - \Omega - \omega_{k-q}) = \\ &= 2(8\pi)^2 N_q N_{k-q} [\omega_{k-q}(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \varepsilon'_\omega(\omega - \Omega, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \Omega_q q^2 \varepsilon'_\Omega(\Omega, \mathbf{q})]^{-1} \times \\ &\times \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q}) \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \delta(\Omega' + \Omega) \delta(\omega' + \omega) \delta(\Omega - \Omega_q) \times \\ &\times \delta(\omega_k - \Omega_q - \omega_{k-q}), \quad (8.14) \end{aligned}$$

$$\varepsilon'_\omega(\omega, \mathbf{k}) \equiv \partial \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) / \partial \omega.$$

Заметное упрощение может быть достигнуто при правильном использовании этих δ -функций. Произведение $\delta(\mathbf{q}' + \mathbf{q}) \delta(\Omega' + \Omega)$ позволяет убрать интегрирование по dq' , из $\delta(\Omega - \Omega_q)$ следует превращение $\int dq \rightarrow \int d\mathbf{q}$. Далее, проинтегрировав обе части уравнения (8.11) по $d\mathbf{k}' d\omega'$, можем сократить $\delta(\mathbf{k}' + \mathbf{k}) \delta(\omega' + \omega)$. Промежуточный результат:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial t} \delta(\omega - \omega_k) &= \int d\mathbf{q} (8\pi)^3 (-i) \left(\sum_\alpha v_{kq}^\alpha e_\alpha \right) N_q N_{k-q} \times \\ &\times [\omega_k k^2 \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \omega_{k-q} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \varepsilon'_\omega(\omega - \Omega, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \Omega_q q^2 \varepsilon'_\Omega(\Omega, \mathbf{q})]^{-1} \times \\ &\times \delta(\omega_k - \Omega_q - \omega_{k-q}). \quad (8.15) \end{aligned}$$

Это уже почти то, чего мы хотели. Последний шаг:

$$\varepsilon^{-1}(\omega, \mathbf{k}) \cong [(\omega - \omega_k) \varepsilon'_\omega(\omega, \mathbf{k})]^{-1} \cong [\varepsilon'_\omega(\omega, \mathbf{k})]^{-1} \pi i \delta(\omega - \omega_k), \quad (8.16)$$

а интегралом в смысле главного значения можно пренебречь, поскольку, как уже было отмечено, его единственная роль состоит в формировании несущественного в данном случае искажения закона дисперсии $\omega(\mathbf{k})$. Наконец, избавляясь от $\delta(\omega - \omega_k)$ при интегрировании по $d\omega$ обеих частей уравнения (8.15), мы и в самом деле получаем правую часть (8.9) с вероятностью

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{k}, \mathbf{q}) &= (8\pi)^3 [k^2 \omega_k \varepsilon'_\omega(\omega, \mathbf{k}) (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 \omega_{k-q} \times \\ &\times \varepsilon'_\omega(\omega - \Omega, \mathbf{k} - \mathbf{q}) q^2 \Omega_q \varepsilon'_\Omega(\Omega, \mathbf{q})]^{-1} \pi \left(\sum_\alpha v_{kq}^\alpha e_\alpha \right)^2, \quad (8.17) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \omega \varepsilon'_\omega(\omega, \mathbf{k}) &\cong (\omega - \Omega) \varepsilon'_\omega(\omega - \Omega, \mathbf{k} - \mathbf{q}) \cong 2, \\ \Omega_q \varepsilon'_\Omega(\Omega, \mathbf{q}) &\cong 2(\omega_{\rho i} / qc_s)^2 = 2(qr_{Di})^2, \end{aligned}$$

так как $q \leq k \ll r_{De}^{-1}$. Мы удержали все производные ε'_ω в уравнении (8.17), чтобы показать, сколь симметричен этот вероятностный коэффициент. Эта симметрия, в частности, укрепляет уверенность в том, что мы нигде не ошиблись и заодно подтверждает, что остальные две трети вычислений привели бы к таким же результатам.

Заметим, что нелинейная структура распадного процесса обусловлена возмущением тока или заряда третьего порядка по амплитуде, но этот третий порядок — вырожденный, он получается при подстановке потенциала второго порядка в уравнение второго же порядка. Это особенность всех трехплазменных процессов.

Нам осталось еще одно усилие до финального результата. Мы должны определить коэффициент v_{kq}^α . Второй порядок уравнений (2.8) или (2.12) при $V_{0\alpha} = 0$ имеет вид

$$\partial n^{(2)}/\partial t + n^{(1)} \operatorname{div} \mathbf{v}^{(1)} + (\mathbf{v}^{(1)} \nabla) n^{(1)} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}^{(2)} = 0, \quad (8.18)$$

где

$$\partial \mathbf{v}^{(2)}/\partial t = -(\mathbf{v}^{(1)} \nabla) \mathbf{v}^{(1)}. \quad (8.19)$$

В фурье-представлении эти уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \omega n_k^{(2)} &= \int dq n_q^{(1)} \mathbf{q} \mathbf{v}_{k-q}^{(1)} + \int dq n_q^{(1)} (\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{v}_{k-q}^{(1)}) + n_0 \mathbf{k} \mathbf{v}_k^{(2)} = \\ &= \frac{1}{2} \int dq [n_q^{(1)} \mathbf{k} \mathbf{v}_{k-q} + n_{k-q}^{(1)} \mathbf{k} \mathbf{v}_q^{(1)}] + n_0 \mathbf{k} \mathbf{v}_k^{(2)}, \end{aligned} \quad (8.20)$$

$$\omega \mathbf{v}_k^{(2)} = \frac{1}{2} \int dq [\mathbf{v}_q^{(1)} (\mathbf{q} \mathbf{v}_{k-q}^{(1)}) + \mathbf{v}_{k-q}^{(1)} (\mathbf{k} - \mathbf{q}, \mathbf{v}_q^{(1)})]. \quad (8.21)$$

Оба они симметричны относительно замены $q \rightarrow k - q$. Следует проделать несколько оценок для сокращения последующих вычислений. Заметим, что

$$n_{\alpha k}^{(1)} = n_0 \mathbf{k} \mathbf{v}_{\alpha k}^{(1)}/\omega.$$

Далее полезно отметить, что в акустической части спектра $qr_{De} \ll 1$

$$n_{iq} \cong n_{eq} \rightarrow \mathbf{v}_{eq}^{(1)} \cong \mathbf{v}_{iq}^{(1)} \cong (e/M)(q/\Omega) \varphi_q.$$

Итак, в уравнениях (8.20), (8.21) можем оценить:

$$\begin{aligned} n_{ik}^{(2)} &\sim v_{ik}^{(2)} \sim v_{iq}^{(1)} v_{ik-q}^{(1)}, \\ n_{ek}^{(2)} &\sim v_{ek}^{(2)} \sim v_{iq}^{(1)} v_{ek-q}^{(1)} \gg v_{iq}^{(1)} v_{ik-q}^{(1)}, \end{aligned}$$

и, как следствие, пренебречь нелинейной поправкой к плотности ионов. В первом (интегральном) члене правой части уравнения (8.20)

$$\begin{aligned} n_q^{(1)} v_{k-q}^{(1)} &\sim (q/\Omega) v_q^{(1)} v_{k-q}^{(1)}; \\ n_{k-q}^{(1)} v_q^{(1)} &\sim (k-q)/(\omega - \Omega) v_q^{(1)} v_{k-q}^{(1)}; \end{aligned}$$

второе произведение оказывается пренебрежимо мало, так как $\omega/k \gg \Omega/q$. По той же причине можно пренебречь и членом, следующим из нелинейности $(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}$ ввиду соотношения

$$n_0 \mathbf{k} \mathbf{v}_k^{(2)} \sim (k/\omega) v_q^{(1)} v_{k-q}^{(1)} \quad \text{или} \quad (q/\omega) v_q^{(1)} v_{k-q}^{(1)}.$$

В результате доминирующий член во всех уравнениях для второго порядка возмущений концентрации оказывается довольно простым:

$$n_{ek}^{(2)} = \frac{1}{2\omega} \int dq n_{eq}^{(1)} \mathbf{k} \mathbf{v}_{k-q}^{(1)} = - \frac{n_0 e^2}{2mT_e} \int dq \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q})}{\omega(\omega-\Omega)} \Phi_q \Phi_{k-q},$$

и, следовательно,

$$\sum_{\alpha} v_{kq}^{\alpha} e_{\alpha} \cong - v_{kq}^e e = \frac{1}{8\pi m r_{De}^2} \frac{(\mathbf{k}, \mathbf{k}-\mathbf{q})}{\omega(\omega-\Omega)}. \quad (8.22)$$

Этот результат надо подставить в уравнение (8.17). Он также может быть записан в более симметричной форме. Мы, однако, делать этого уже не станем, поскольку наша цель может считаться достигнутой: мы вывели кинетическое уравнение для волн, описывающее конкретный трехплазмонный распадный процесс. Может быть, процедура выглядит несколько громоздкой, но у нас больше нет на этом пути принципиальных затруднений. Характерное время эволюции спектра можно оценить как $(\omega W^e/nT)^{-1}$ или $(\Omega W^s/nT)^{-1}$. Не приходится сомневаться, что во многих случаях эти оценки окажутся слишком грубыми. Для большей точности приходится давать детальное решение задачи.

8.2. Индуцированное рассеяние

Этот нелинейный эффект может быть корректно рассмотрен только в рамках кинетики, как и затухание Ландау. Хотя и нежелательно перегружать книгу громоздкими вычислениями, необходимо все же дать правильный рецепт вывода уравнения (7.15) или подобного ему. Но, поскольку процедура окажется даже более громоздкой, нежели в предыдущем случае, мы все же не станем воспроизводить ее полностью, и некоторые детали будут опущены. Для начала рассмотрим уравнение (2.1) при $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ (потенциальная волна) вместе с уравнением Пуассона. Для любых нелинейных процессов (2.1) расщепляется на два уравнения — одно из них описывает относительно медленную эволюцию фонового распределения:

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla) f^{\alpha} = \left(\frac{e}{m}\right)_{\alpha} \langle \nabla \Phi \frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \rangle, \quad \alpha = i, e, \quad (8.23)$$

а другое, осцилляторное уравнение, мы с самого начала представим в нелинейной форме:

$$-\tilde{\omega} f_k^\alpha = \left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \mathbf{k} \frac{\partial f^\alpha}{\partial \mathbf{v}} \varphi_k + \left(\frac{e}{m}\right)_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int dk' \mathbf{k}' (\varphi_{k'} f_{k''}^\alpha - \langle \varphi_{k'} f_{k''}^\alpha \rangle), \quad (8.24)$$

где $k = (\mathbf{k}, \omega)$, $\tilde{\omega} = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v}$, и то же для k' , k'' . В данном разделе будут рассматриваться лишь чисто электронные возмущения на предмет конструирования процесса, изображенного на рис. 8.1б. Вообще говоря, ненулевой вклад ионов плазмы и в такой процесс не может быть исключен а priori. Действительно, биения двух ленгмюровских волн, затухающие на частицах, вполне могут по частоте и волновому числу оказаться близкими к ионно-звуковым волнам. Только вычислениями можно доказать, что эта возможность не реализуется. Мы, однако, примем этот факт без доказательства. Ионы, к тому же, могут сформировать некий фон (ионное облако), к которому электроны будут привязаны через посредство дебаевского экранирования. Тогда при взаимодействии с этими электронами ленгмюровские волны будут, тем не менее, связаны «ионным» резонансным условием $\omega'' \leq k'' v_{Ti}$. Вот этот процесс оказывается и в самом деле существен, более того, он оказывается доминирующим среди процессов индуцированного рассеяния ленгмюровских волн. (Но и этого мы не будем специально доказывать.) Из-за такого резонанса его принято называть индуцированным рассеянием ленгмюровских волн на ионах, хотя это и не вполне верно по сути. Ради наглядности нашего примера вычислений мы оставим в стороне все эти возможности и рассмотрим рафинированный процесс плазмон-электронного рассеяния. Соответственно, $\alpha \equiv e$ (в дальнейшем индекс сорта частиц будет везде опущен: $(e/m)_\alpha \equiv -(e/m)$). Второй порядок уравнения (8.24) следует записать в виде

$$\tilde{\omega} f_k^{(2)} = \frac{e}{m} \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \frac{1}{2} \left(\frac{e}{m}\right)^2 \int dk' \left(\mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{k'' \partial \partial \mathbf{v}}{\tilde{\omega}'''} + \mathbf{k}'' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{k' \partial \partial \mathbf{v}}{\tilde{\omega}'''} \right) f (\varphi_{k'} \varphi_{k''} - \langle \varphi_{k'} \varphi_{k''} \rangle). \quad (8.25)$$

Нелинейные резонансы $\tilde{\omega}' = 0$ или $\tilde{\omega}'' = 0$ как раз и соответствуют индуцированному рассеянию. Но второй порядок теории возмущений для рассмотрения процессов этого класса недостаточен. Как уже говорилось, в случае трехплазменных процессов работает третий порядок теории, но в вырожденной форме, фактически сводящейся ко второму порядку. Индуцированное рассеяние таким свойством не обладает, так что вычисления придется продолжить. Мы должны будем подвергнуть уравнение (8.25) итерационной процедуре. Для этого оказывается удобным ввести оператор, по форме близкий к так называемому пропагатору в квантовой теории поля:

$$\mathbf{g}_k \equiv \tilde{\omega}^{-1} \frac{e}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}. \quad (8.26)$$

Что касается полюса $\tilde{\omega} = 0$, то его следует обходить так же, как и в уже известном нам случае затухания Ландау, т.е. $\tilde{\omega} = \omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\varepsilon$.

В линейной (квазилинейной) теории это правило могло быть строго обосновано на основе преобразования Лапласа. В нелинейной теории подобное доказательство построить уже не удастся, и остаются лишь физические аргументы, подобные таковым из гл. 2. Линейная диэлектрическая проницаемость может быть переписана с использованием оператора (8.26):

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{k}\right)^2 \int \mathbf{k}\mathbf{g}_k f dv.$$

Возмущение третьего порядка, следующее из итераций уравнения (8.25), лучше записывать сразу же с учетом случайности фаз:

$$\langle \varphi_k \varphi_{k'} \varphi_q \rangle \equiv 0, \quad \langle \varphi_k \langle \varphi_{k'} \varphi_q \rangle \rangle \equiv 0,$$

что заметно сокращает вычисления. В полностью симметричной форме результат окажется следующим:

$$\begin{aligned} f_k = & \mathbf{k}\mathbf{g}_k f \varphi_k + \frac{1}{2} \int dk' [(\mathbf{k}'\mathbf{g}_k)(\mathbf{k}''\mathbf{g}_{k''}) + (\mathbf{k}''\mathbf{g}_k)(\mathbf{k}'\mathbf{g}_{k'})] f \times \\ & \times (\varphi_{k'} \varphi_{k''} - \langle \varphi_{k'} \varphi_{k''} \rangle) + \\ & + \frac{1}{4} \iint dk' dq \{ [(\mathbf{k}'\mathbf{g}_k)(\mathbf{q}\mathbf{g}_{k'})](\mathbf{k}'' - \mathbf{q}, \mathbf{g}_{k''-q}) + \\ & + (\mathbf{k}'\mathbf{g}_k)(\mathbf{k}'' - \mathbf{q}, \mathbf{g}_{k''}) (\mathbf{q}\mathbf{g}_q) \} f (\varphi_{k'} \varphi_q \varphi_{k''-q} - \langle \varphi_q \varphi_{k''-q} \rangle) + \\ & + [(\mathbf{k}''\mathbf{g}_k)(\mathbf{q}\mathbf{g}_{k'})](\mathbf{k}' - \mathbf{q}, \mathbf{g}_{k'-q}) + (\mathbf{k}''\mathbf{g}_k)(\mathbf{k}' - \mathbf{q}, \mathbf{g}_{k'}) (\mathbf{q}\mathbf{g}_q) \} f \times \\ & \times (\varphi_{k''} \varphi_q \varphi_{k'-q} - \langle \varphi_{k''} \varphi_q \varphi_{k'-q} \rangle). \quad (8.27) \end{aligned}$$

Но (8.27) — еще не полное уравнение третьего порядка. Его еще необходимо дополнить подстановкой возмущенного потенциала $\varphi^{(2)}$, как мы это делали в предыдущем разделе. И только после этого возможно будет построить кинетическое уравнение для волн, следуя такой схеме:

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \varphi_k \cong & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} k^2 \varphi_k \cong \\ \cong & -i \operatorname{Im} \int dk' \int dv 4\pi n e [(\mathbf{k}'\mathbf{g}_k)(\mathbf{k}''\mathbf{g}_{k''}) + (\mathbf{k}''\mathbf{g}_k)(\mathbf{k}'\mathbf{g}_{k'})] f \times \\ & \times (\varphi_{k'} \varphi_{k''} - \langle \varphi_{k'} \varphi_{k''} \rangle) + \dots \quad (8.28) \end{aligned}$$

В принципе, в (8.28) и далее (в уравнении (8.29) и т.д.) присутствуют и трехплазмонные процессы, но, как нам уже удалось установить, таковые принципиально запрещены, если в них участвуют только ленгмюровские волны. Индуцированное рассеяние включает в себя два когерентных процесса (см. гл. 7) — затухание биений

($\varphi^{(2)}$ и есть как раз такое биение) и нелинейный эффект Комптона. Последний представлен в уравнении (8.27) самым длинным интегральным членом. Мы воспользуемся именно этим слагаемым для демонстрации усреднения по фазам. Умножая (8.28) на $\varphi_{q'}$ и проводя усреднение, в левой части получим

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} k^2 \frac{\partial I_{\mathbf{k}}}{\partial t} \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q}') \delta(\omega + \Omega') \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}), \quad (8.29)$$

а в правой —

$$\dots \int dk' dq \{ Q_{k', q, k''} \langle \varphi_{k'} \varphi_{q'} \varphi_q \varphi_{k''-q} - \varphi_{k'} \varphi_{q'} \langle \varphi_q \varphi_{k''-q} \rangle \rangle + \\ + Q_{k'', q, k} \langle \varphi_{k''} \varphi_{q'} \varphi_q \varphi_{k'-q} - \varphi_{k''} \varphi_{q'} \langle \varphi_q \varphi_{k'-q} \rangle \rangle \}, \quad (8.30)$$

где

$$Q_{k', q, k''} = -4\pi n e \operatorname{Im} \int d\mathbf{v} (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}}) [(\mathbf{q} \mathbf{g}_{k''}) (\mathbf{k}'' - \mathbf{q}, \mathbf{g}_{k''-q}) + \\ + (\mathbf{k}'' - \mathbf{q}, \mathbf{g}_{k''}) (\mathbf{q} \mathbf{g}_q)] f. \quad (8.31)$$

Вся последующая процедура усреднения правой части уравнения (8.28) ничем в принципе не отличается от того, что делалось в разделе 8.1:

$$\langle \varphi_{k'} \varphi_{q'} \varphi_q \varphi_{k''-q} - \varphi_{k'} \varphi_{q'} \langle \varphi_q \varphi_{k''-q} \rangle \rangle = \\ = \langle \varphi_{k'} \varphi_{q'} \rangle \langle \varphi_q \varphi_{k''-q} \rangle + \langle \varphi_{k'} \varphi_{k''-q} \rangle \langle \varphi_{q'} \varphi_q \rangle = \\ = I_{\mathbf{k}'} I_{\mathbf{k}} \{ \delta(\mathbf{k}' + \mathbf{q}) \delta(\omega' + \Omega) \delta(\omega' - \omega_{\mathbf{k}'}) \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{k}) \times \\ \times \delta(\Omega' + \omega) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \delta(\omega - \Omega) \times \\ \times \delta(\omega' - \omega_{\mathbf{k}'}) \delta(\mathbf{q}' + \mathbf{k}) \delta(\Omega' + \omega) \delta(\omega - \omega_{\mathbf{k}}) \}, \quad (8.32)$$

и то же самое для второй корреляции четвертого порядка в уравнении (8.30) с точностью до замены $k' \rightarrow k''$. Затем, интегрируя обе стороны полученного равенства по $d\mathbf{q}' d\Omega' d\omega$, можно избавиться от всех δ -функций в левой части, а в правой — от трех из шести. Три оставшиеся δ -функции убирают интегрирование по $dq d\omega'$. Получаем

$$\dots I_{\mathbf{k}} \int d\mathbf{k}' \{ I_{\mathbf{k}'} [Q_{k', -k', k''} + Q_{k', k, k''}] + \\ + I_{\mathbf{k}''} [Q_{k'', -k'', k'} + Q_{k'', k, k'}] \}, \quad (8.33)$$

где, например,

$$Q_{k', k, k''} = 4\pi n e \operatorname{Im} \int d\mathbf{v} (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{\mathbf{k}}) [(\mathbf{k} \mathbf{g}_{k''}) (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{-k'}) + \\ + (\mathbf{k}' \mathbf{g}_{k''}) (\mathbf{k} \mathbf{g}_k)] f. \quad (8.34)$$

Из всех возможных мнимых членов в (8.34) только один важен для нас — тот, который следует из $\tilde{\omega}''^{-1} \cong \pi i \delta(\omega'' - \mathbf{k}'' \mathbf{v})$.

Дальнейшие вычисления сколь просты в принципе, столь и громоздки. Наиболее существенный их результат — то, что коэффициент вероятности может быть представлен в совершенной форме как квадрат амплитуды процесса, которая есть сумма амплитуд соответственно нелинейного комптон-эффекта и нелинейного затухания:

$$\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \int d\mathbf{k}' N_{\mathbf{k}} N_{\mathbf{k}'} \int d\mathbf{v} \frac{4\pi}{mn} \frac{\omega_{pe}^4}{k^2 k'^2} [\epsilon'_{\omega}(\omega, \mathbf{k}) \epsilon'_{\omega'}(\omega', \mathbf{k}')]^{-1} \times \\ \times \left| \left(\frac{\mathbf{k}\mathbf{k}'}{\tilde{\omega}\tilde{\omega}'} \right) + \frac{S_{kk'}}{\epsilon(\omega'', \mathbf{k}'')} \right|^2 \delta(\tilde{\omega}'') \mathbf{k}'' \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}, \quad (8.35)$$

где

$$S_{kk'} = -\frac{m}{e} \sum_{\alpha=i, e} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2} \left(\frac{e}{m} \right)_{\alpha} \int d\mathbf{v} \tilde{\omega}''^{-1} \left(\mathbf{k} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\mathbf{k} \partial / \partial \mathbf{v}}{\tilde{\omega}'} - \mathbf{k}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \frac{\mathbf{k} \partial / \partial \mathbf{v}}{\tilde{\omega}'} \right) f^{\alpha} \quad (8.36)$$

и есть амплитуда «нелинейного затухания Ландау». Интересно, что как раз в случае индуцированного плазмон-электронного рассеяния упомянутые два эффекта с хорошей точностью компенсируют друг друга (их амплитуды имеют разные знаки), поэтому грубые оценки скорости нелинейной перекачки или, скажем, нелинейного затухания на основе уравнения (8.36) не были бы правильны. Самая грубая оценка, которую можно себе позволить для этого процесса, выглядит так:

$$\gamma_{(1el)} \approx \omega_{pe} \frac{W^1}{nT} (kr_{De})^3 \quad (8.37)$$

(вместо $(kr_{De})^1$, как получилось бы без учета такой компенсации). Окончательного выражения для матричного элемента мы приводить не станем. Наша цель в данной главе — продемонстрировать принцип, и мы — ценой определенных усилий — это сделали. Весьма обширную информацию по затронутым здесь вопросам можно найти в обеих книгах Цытовича (1967 г., 1971 г.). А мы перейдем к следующей теме.

Нелинейное взаимодействие «волна-волна» и «волна-частица». Сценарии слабой турбулентности

В данной главе — достаточно короткой — вниманию читателя предлагаются несколько примеров турбулентных моделей и сценариев, без сколько-нибудь подробной детализации и практически (за одним исключением) без ссылок. Наша цель — продемонстрировать

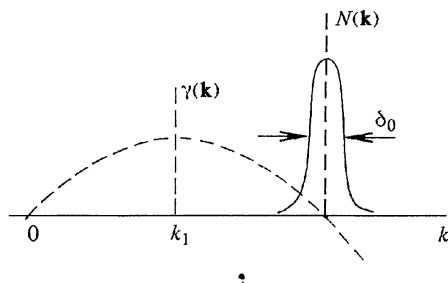


Рис 9.1. Двухуровневая перекачка шумов

приложение уравнений, введенных в предшествующих главах, к реальной физике. Единственная наша ссылка относится к замкнутой рафинированной задаче, на примере которой можно познакомиться с той спецификой, которую вносит в нелинейную физику эффект индуцированного рассеяния волн на частицах (Кингсеп, Рудаков, 1970 г.).

Рассмотрим эволюцию узкого спектра плазменных волн, следуя очень простой модели: пусть наш спектр представляет собой одномерный узкий (в \mathbf{k} -пространстве) волновой пакет с характерным волновым числом k_0 (рис. 9.1), и пусть только индуцированное рассеяние дает существенный вклад в его эволюцию (скажем, распады запрещены, а число резонансных частиц экспоненциально мало).

Как мы уже установили, индуцированное рассеяние формально описывается некоторым нелинейным инкрементом γ_k . Его примерный вид в зависимости от волнового числа также представлен на рис. 9.1. Инкремент обращается в нуль при $k = 0$ и $k = k_0$. Очевидно, в интервале $0 < k < k_0$ функция γ_k должна иметь хотя бы один максимум. Пусть главный максимум соответствует точке k_1 , если исходный спектр достаточно узок, чтобы эта точка оказалась вне его (а ширина функции $\gamma_n(k)$ всегда порядка k), как это показано на рис. 9.1. Предположим, что во всем интервале $0 < k < k_0$ существует некоторый фон флуктуаций $n(k)$. Соответственно рис. 9.1, полагаем ширину спектра δ_0 малой по сравнению с $(k_0 - k_1)$; тогда в точке k_1 вследствие нелинейной перекачки происходит преимущественный рост шумов. И пока достаточно значительная часть квантов исходной линии не будет перенесена в эту точку, общая картина остается той же, что только что была описана, а число волн при $k \approx k_1$ будет расти по экспоненциальному закону:

$$N(k_1) = n(k_1) \exp [\gamma(k_1)t]. \quad (9.1)$$

Как правило, в равновесной или почти равновесной плазме $n(k)$ — степенная функция k ; тогда конкретный вид $n(k)$ неважен по сравнению с зависимостью $\gamma(k)$, ибо последняя входит в показатель экспоненты. Как следствие, по истечении времени

$$\tau \approx \Lambda/\gamma(k_1), \quad \Lambda = \ln [N(k_0)/n(k_1)], \quad (9.2)$$

число плазмонов в новой линии $k \approx k_1$ достигает по порядку величины числа плазмонов в исходной линии. И только теперь начинается заметная перестройка функции $\gamma(k)$, которая оставалась неизменной, пока выполнялось условие $N(k_1) \ll N(k_0)$. К этому моменту уже сформировалась новая линия, ширина которой может быть оценена из соотношения

$$N(k_1 \pm \delta k)/N(k_1) \approx \exp [-(\delta k)^2(\partial^2\gamma/\partial k^2)\tau] \quad (9.3)$$

и оказывается по порядку величины равной

$$\delta_1 \approx \left[\gamma(k_1)/(\partial^2\gamma/\partial k^2)_{k=k_1} \Lambda \right]^{1/2}. \quad (9.4)$$

Новая линия снова оказывается узкой как следствие условия $\Lambda \gg 1$. По мере того, как число плазмонов в ней становится порядка $N(k_0)$, максимум функции $\gamma(k)$ начинает сдвигаться в сторону меньших k . Но при этом новая линия все время остается в области $\gamma > 0$, а время, необходимое для полной перекачки в нее исходного спектра, теперь всего лишь порядка $\gamma^{-1}(k_1)$, поэтому весь спектр

туда и переносится. Чтобы где-то еще уровень шумов достиг величины порядка $N(k_0)$, необходимо гораздо большее время — порядка $\tau \approx \Lambda \gamma^{-1}(k)$. Итак, практически весь исходный спектр оказался перенесен в новую узкую линию при $\langle k \rangle \approx k_1$, а затем процесс будет повторяться. При этом в каждый данный момент времени не может существовать более двух развитых спектральных линий, что обусловлено большой величиной τ .

Нетрудно получить и закон спектральной перекачки в зависимости от времени, если перенос по спектру происходит только между двумя узкими линиями. Полный инкремент, с точностью до членов порядка δ_0/k_0 , может быть записан в виде

$$\gamma(k) = Q_{kk_1} N(k_1) + Q_{kk_0} [N_0 - N(k_1)] \quad (9.5)$$

(мы учли, что полное число волн N_0 остается в процессе перекачки неизменным). В результате получаем следующее уравнение, описывающее спектральную эволюцию:

$$\frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{N(k_1)}{N_0} = \gamma_0 \left[1 - \frac{N(k_1)}{N_0} \right], \quad (9.6)$$

$$\gamma_0 \equiv N_0 Q_{k_1 k_0} = \gamma(k_1)_{t=0}.$$

Решая (9.6) при начальном условии $N(k_1)_{t=0} = n(k_1)$, приходим к следующему результату:

$$N(k_1, t) \cong N_0 / [1 + (N_0/n) \exp(-\gamma_0 t)], \quad (9.7)$$

$$N(k_0, t) = N_0 - N(k_1, t),$$

а полное время переноса определяется «конечным» условием $N(k_0) = n$ равенства числа волн в исходной линии фоновому, откуда получаем $\tau \approx 2\Lambda/\gamma_0$. Такой «двухуровневый» процесс может конкурировать с процессом диффузионного переноса волн на «лсвый край» линии со смещением ее центра тяжести — точнее, оба они дополняют друг друга.

Этим механизмом могут порождаться некоторые любопытные эффекты. Рассмотрим в качестве иллюстрации эволюцию узкого спектра ленгмюровских волн:

$$N(\mathbf{k}) \cong N_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0),$$

как следствие нелинейного рассеяния на ионах. Как уже отмечалось в предыдущей главе, именно этому процессу соответствует максимальная нелинейная частота. (В этой связи напомним еще раз, что этот эффект, хотя и определяется «ионным» резонансом, реально обусловлен рассеянием волн не на ионах как таковых, но на экра-

нирующем электронном облаке.) Точные уравнения, описывающие его, можно найти в любой из двух цитированных книг Цытовича:

$$\left(\frac{\partial N_{\mathbf{k}}}{\partial t}\right)_{\text{ил}} = \frac{N_{\mathbf{k}}(2\pi)^{1/2}}{16mnr_{\text{De}}^2} \int d\mathbf{k}' N_{\mathbf{k}'} \cos^2 \angle \mathbf{k}\mathbf{k}' \left(\frac{\omega''}{k''v_{T_i}}\right) \exp \left[-\left(\frac{\omega''}{k''v_{T_i}}\right)^2 \right]. \quad (9.8)$$

Максимальная частота рассеяния равна $\omega_{\text{pe}}(N_0\omega/nT_e)$. Поскольку двухуровневый перенос связан как раз с максимальным инкрементом, он и должен в данном случае идти через посредство рассеяния на ионах. Решая уравнение $\partial\gamma/\partial\mathbf{k} = 0$, нетрудно получить (а читателю предоставляем проверить) положение новой линии \mathbf{k}_1 в пространстве волновых векторов:

$$\angle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 = 0, \quad \frac{k_1}{k_0} = \frac{2}{3} \left(\frac{mT_i}{MT_e}\right)^{1/2} \frac{1}{k_0 r_{\text{De}}} - 1 \quad \text{при} \quad k_0 r_{\text{De}} < \frac{2}{3} \left(\frac{mT_i}{MT_e}\right)^{1/2}, \quad (9.9)$$

$$\angle \mathbf{k}_1 \mathbf{k}_0 = \pi, \quad \frac{k_1}{k_0} = 1 - \frac{2}{3} \left(\frac{mT_i}{MT_e}\right)^{1/2} \frac{1}{k_0 r_{\text{De}}} \quad \text{при} \quad k_0 r_{\text{De}} > \frac{2}{3} \left(\frac{mT_i}{MT_e}\right)^{1/2}.$$

В различных экспериментах различным оказывается и отношение температур T_i/T_e . Для подавляющего большинства экспериментов по взаимодействию пучков или лазерного излучения с плазмой выполняется соотношение $T_i/T_e \ll 1$. В пробкотронах (зеркальных ловушках) может быть и $T_i/T_e \gg 1$. Но эти « \ll » и « \gg » обычно пренебрежимы в сравнении с отношениями m/M или M/m . Поэтому в уравнениях (9.9) эти отношения масс играют более важную роль. Далее, заметим, к примеру, что для пучково-плазменных систем $k_0 r_{\text{De}} \approx v_{T_e}/v_b$; в частности для электронных пучков

$$(k_0 r_{\text{De}})^2 \approx T_e/\varepsilon_b.$$

При типичных экспериментальных условиях это отношение хотя и мало, все же существенно превышает m/M , т.е. второй предельный случай в (9.9) гораздо более типичен, нежели первый. Более того, и в большинстве других плазменных систем ленгмюровские волны возбуждаются, как правило, именно в этой достаточно коротковолновой области спектра. Для них, следовательно, справедливо второе из решений (9.9), а значит, нелинейное рассеяние в новую линию представляет собой по сути нелинейное отражение. Оценим длину пробега волнового пакета относительно такого процесса:

$$L \approx \gamma^{-1} \Lambda / (\partial\omega/\partial k) \approx \Lambda r_{\text{De}} (k r_{\text{De}}) (nT_e/N_0\omega), \quad (9.10)$$

которая, как можно видеть, падает с каждым последующим отражением. Таким образом, происходит «запутывание» пучка волн на

участке конечной длины, происходящее до тех пор, пока остается в силе условие $(kr_{De})^2 > m/M$.

В контексте только что рассмотренного эффекта можно указать и на некоторые свойства турбулентных спектров более общего характера, обусловленные индуцированным рассеянием. Они, правда, представляют собой скорее теоретические результаты, нежели экспериментально наблюдаемые эффекты. Именно, при активном участии нелинейного рассеяния волн на частицах в одномерной задаче формируются дискретные спектры, а в трехмерной — так называемые «струйные»; под этим подразумевается общий случай спектров, занимающий в \mathbf{k} -пространстве множество меры нуль:

$$N(\mathbf{k}) \sim \delta[\mathbf{k} - \mathbf{k}_m(\mathbf{r})] \quad \text{или} \quad N(\mathbf{k}) \sim \delta[k - k_m(\theta, \varphi)], \quad (9.11)$$

$$m = 1, 2, 3, \dots$$

На самом деле, конечно, ширина их не равна в точности нулю — она просто мала как Λ^{-1} . При наличии источника турбулентности система оказывается даже и в простейшей постановке не двухуровневой, но, по крайней мере, многоуровневой. Наиболее полным образом все эти ситуации разобраны в работе Брейзмана, Захарова, Мушера (1973 г.). Но в реальных экспериментальных ситуациях при учете неоднородности или нестационарности задачи, конечной ширины источника и т.п. такие спектры осцилляций выглядят скорее экзотикой, а потому мы не будем подробно на них останавливаться, ограничившись приведенным выше простым примером.

Перейдем к реальному и притом наиболее общему свойству всех турбулентных сценариев, включающих индуцированное рассеяние, а равно и другие процессы нелинейного взаимодействия волн. Как уже отмечалось выше (гл. 7), неизбежность роста энтропии приводит к тому, что индуцированное рассеяние организует поток энергии в \mathbf{k} -пространстве от больших k к меньшим или, что то же, в \mathbf{g} -пространстве от малых масштабов к большим. Пусть теперь мы построили полный сценарий слабой турбулентности, включающий, помимо рассеяния волн на частицах и, быть может, квазилинейных эффектов, гидродинамические процессы нелинейного взаимодействия волн. Трехплазменные распады и рассеяние не сохраняют, вообще говоря, число плазмонов. Если мы как бы выключим индуцированное рассеяние, трехплазменные процессы будут стремиться установить такое состояние, чтобы выражение в скобках правой части (7.5) обратилось в нуль. Теперь, «включив» индуцированное рассеяние, мы должны получить дрейф спектра в \mathbf{k} -пространстве в сторону меньших k (точнее — в сторону меньших ω_k). Усложним сценарий, добавив четырехплазменные процессы (четырёхволностые диаграммы на рис. 9.2. Плазмон-плазмонное рассеяние (рис. 9.2а) сохраняет число волн и, по существу, ничего не меняет. Четырёхплазмонный распад (рис. 9.2б), который иногда разрешен законами

сохранения, или все то же четырехплазмонное рассеяние, но с участием разных мод, дают не столь тривиальный вклад, но, будучи по природе гидродинамическими, они тем самым остаются консерва-

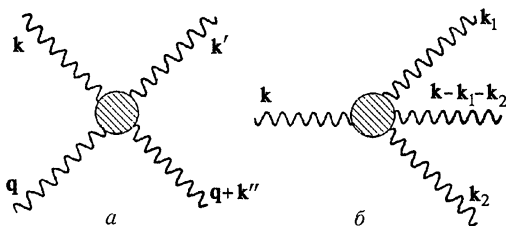


Рис 9.2. Четырехплазмонное рассеяние (а) и четырехплазмонный распад (б)

тивными. Поэтому стационарное состояние, хотя и модифицированное, все же остается их асимптотикой. В итоге должно получиться (с некоторыми необходимыми поправками) нечто вроде распределения Рэля—Джинса. В то же время нелинейная диссипация ведет к росту энтропии. Используя стандартные соотношения

$$H_{e,i} \sim \ln f_{e,i}, \quad H_k \sim \ln N_k, \quad (9.12)$$

можно сделать следующую оценку:

$$H_W/H_{e,i} \approx W/nT_{e,i} \ll 1. \quad (9.13)$$

Из нее следует естественный результат: рост энтропии должен обеспечиваться нагревом частиц, тогда как в эволюции спектра «энтропийные» соображения, по существу, не работают. Второй важный вывод из всего проведенного рассуждения: распределение квазичастиц обнаруживает тенденцию потока энергии в область малых частот. Это вообще фундаментальное свойство слабой турбулентности.

Наши аргументы, конечно, не являются строгим доказательством, но точные решения оказываются с ними в хорошем согласии.

Мы не вовлекали квазилинейное взаимодействие волн с частицами в наши «мысленные эксперименты». Обычно оно занимает довольно узкую область в фазовом пространстве, выполняя роль источника или стока. В противном случае оно должно доминировать над высшими порядками, и тогда приведенные выше рассуждения не имеют силы.

Мы, строго говоря, до настоящего времени рассматривали даже не турбулентность, а некоторую эволюцию во времени системы, состоящей из частиц и квазичастиц. Попробуем, однако, обратиться к настоящей турбулентности.

Общеизвестен закон Колмогорова—Обухова:

$$W_k dk \sim \varepsilon^{2/3} k^{5/3} dk, \quad (9.14)$$

где ε — скорость диссипации в турбулентном состоянии. Этот закон предполагает квазистационарное состояние турбулентности с постоянным потоком по масштабам в \mathbf{k} -пространстве. Конечно, это турбулентность несжимаемой жидкости, имеющая весьма мало общего с нашим объектом. Действительно, мы имеем дело с продольными потенциальными волнами, в других моделях — с другими модами, но обычно опять-таки с плоскими волнами. Что же касается турбулентности однокомпонентной несжимаемой жидкости, то в основе ее — вихревая динамика. В отличие от слабой турбулентности ее нельзя рассматривать, используя прямое разложение в теории возмущений. Типичная картина гидродинамической турбулентности не допускает приближения случайных фаз — за исключением турбулентности поверхностных волн. Описание турбулентной динамики только усредненными величинами плотности энергии и импульса не является достаточным для гидродинамической турбулентности, важную роль играют в ней различные структуры. Попытки усредненного описания, тем не менее, предпринимаются — пусть даже и с потерей какой-то информации, — но при этом остается важнейшее отличие от слабой турбулентности: поток энергии в \mathbf{k} -пространстве имеет другое направление. Перенос энергии в случае квазистационарной гидродинамической турбулентности происходит от малых k к большим, т.е. от больших масштабов к малым. Источник турбулентных пульсаций локализован в \mathbf{k} -пространстве в области больших масштабов, а в области малых располагается энергетический сток. Между ними, занимая значительную область в логарифмиче-

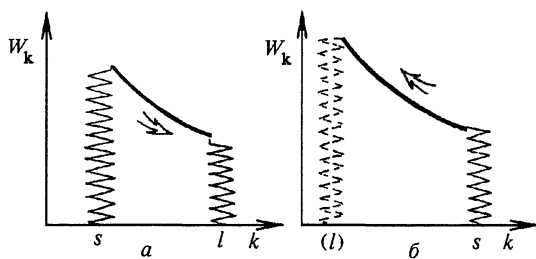


Рис 9.3. Типичный вид спектральных распределений для гидродинамической турбулентности (а) и слабой турбулентности (б): s — область источника, l — область стока. Стрелки показывают направление потока энергии внутри инерционного интервала

ском масштабе, расположен так называемый инерционный интервал, где не происходит ни накачки, ни диссипации, но лишь перенос энергии по масштабам (рис. 9.3).

Можно представить себе и другие сценарии. Но корректное рассмотрение и сколько-нибудь универсальные результаты получаются только при наличии выраженного инерционного интервала, в котором

$$\operatorname{div}_{\mathbf{k}} \mathbf{Q} \equiv 0, \quad (9.15)$$

где Q — поток энергии в k -пространстве. В некоторых ситуациях он может «схлопнуться» до нуля в зависимости от положения области источника s (это может быть, например, гидродинамическая неустойчивость) и стока l (например, вязкость). Конкретный механизм переноса в инерционном интервале определяет и степенные зависимости в уравнении (9.14). Отчасти для этого можно использовать размерностные соображения, но при столь общем подходе ответ никогда не бывает однозначным.

Вообще говоря, такую же идею можно реализовать и в приближении слабой турбулентности. Но, как мы уже говорили, в этом случае эволюция спектра идет по-другому, так что поток энергии оказывается направлен в сторону малых масштабов (может быть — прямо в нулевой масштаб). Там, в принципе, может быть локализован сток, но проблема состоит в том, чтобы найти для этого адекватный физический механизм. Обычно в приближении слабой турбулентности это не очень-то удается. Тогда приходится (вместе с нашим объектом) выходить за рамки слабой турбулентности (см. по этому поводу гл. 12—14). Тем не менее, такого рода «колмогоровские» модели конструируются и успешно работают как в случае слабой турбулентности плазмы, так и для поверхностных волн на воде. Нам не хотелось бы отсылать читателя к оригинальным работам, потому что они слишком сложны для студента, но во всяком случае имена авторов должны быть названы: Захаров, Цытович и Пикельнер, Кадомцев и Канторович, Сагдеев, Дюпри. Получаются степенные спектры, похожие на (9.14). Но чаще всего, вместо непрерывного степенного спектра, в различных интервалах по масштабам они различаются показателем степени, так что их еще нужно сшивать друг с другом. Есть ли смысл в построениях, теряющих красоту и универсальность спектра Колмогорова—Обухова? Некоторый смысл все же есть, потому что знание спектров турбулентности дает возможность вычислять коэффициенты переноса. Как раз аномальные коэффициенты переноса — диффузии, тепло- и электропроводности, вязкости и т. д. — суть главные результаты, за которые должна бороться теория слабой турбулентности; в то же время сильная гидродинамическая турбулентность обычно определяет в физике плазмы саму возможность ее удержания.

В этих теоретических построениях принципиальную роль играют обычно соображения размерности, законы подобия и, соответственно, автомодельные решения. Но мы, к сожалению, не можем войти в детали, хотя в дальнейшем еще несколько раз вернемся к идее квазистационарной турбулентности.

Коллективное взаимодействие «плазма-пучок». Нелинейная стабилизация пучковой неустойчивости. «Длина свободного пробега» пучка в плазме

Развитая слабая турбулентность колмогоровского типа выглядит скорее чисто теоретическим изобретением, нежели реалистичным турбулентным сценарием. В самом деле, каждый следующий порядок теории возмущений означает лишний фактор W/nT во всех вероятностях и эффективных частотах. Как правило, даже четырехплазмонное рассеяние (см. рис. 9.2) оказывается слишком медленным, чтобы представлять высший активный порядок теории возмущений. Еще более высокие порядки могут потребовать характерных времен, даже превосходящих время эксперимента. Подобные рассуждения, конечно, заведомо не универсальны, однако представленная ситуация довольно типична. Как следствие, в плазме достаточно типична альтернативная турбулентная динамика, а именно — квазистационарный баланс возбуждения и поглощения волн, включающий лишь два-три порядка теории возмущений. Результат соответственно будет мало похож как на равновесный, так и на «квазиколмогоровский» спектр.

По-видимому, самый простой пример такого рода — нелинейная стадия неустойчивости пучка в плазме, особенно типичная для различных систем пучкового нагрева. В настоящее время при этом обычно используются мощные релятивистские пучки. Мы не будем останавливаться на «пучковой» схеме инерциального ядерного синтеза, потому что в этом случае взаимодействие пучка с мишенью — не коллективного характера. Наш случай скорее соответствует системам пучкового нагрева плазмы в открытых ловушках. Квазилинейная стадия такого взаимодействия кратко обсуждалась в гл. 5; более детально — см. обзор Веденова и Рютова (1972 г.). Имеет смысл подчеркнуть одну ее важную особенность. Зависимость линейного инкремента $\gamma(\theta)$ в соответствии с тем, что говорилось в гл. 9, обостряется подэкспоненциальным фактором $\Lambda = \ln(W_f/W_i) \gg 1$. И поскольку эта зависимость — всегда убывающего характера, начальный спектр оказыва-

ется квазиодномерным, а его угловое уширение происходит только по мере релаксации пучка.

В качестве примера вполне подойдет электронный пучок. При рассмотрении его длины торможения нелинейные эффекты обычно важны при определении свободного пробега относительно трансформации энергии движения электронов в плазменные шумы, а равно и в последующей их диссипации. В этом отношении сделанные ниже оценки отличаются от таковых, полученных в гл. 5.

Принципиально важной для нас будет идея нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости в плазме. Возможность такого эффекта впервые предсказана Цытовичем и Шапиро (см., например, книгу Цытовича, 1967 г.). Экспериментально она идентифицирована с должным уровнем надежности Закастовым и др. (1973 г.), Головановым и др. (1978 г.). Обсудим главную идею эффекта.

По мере того, как пучок возбуждает плазменные волны, например ленгмюровские, последние транспортируются в нерезонансную область фазового пространства через трехплазменные процессы или индуцированное рассеяние. Накопление плазмонов в нерезонансной области постепенно приводит плазменно-пучковую систему к состоянию, в котором нелинейный декремент затухания — в резонансной области — превзойдет линейный инкремент. Это значит, что дальнейшая раскачка шумов становится невозможной, а с ней — и релаксация пучка. В резонансной области пространства скоростей сохраняется лишь шумовой фон на уровне флуктуаций. На самом деле в области накопления шумов произойдет некоторая их диссипация, поэтому неустойчивость не может совсем остановиться, но устанавливается динамическое равновесие, в котором убыль шумов как раз компенсируется

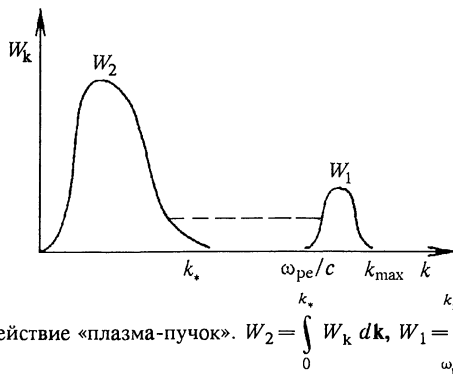


Рис. 10.1. Взаимодействие «плазма-пучок». $W_2 = \int_0^{k_*} W_k dk$, $W_1 = \int_{\omega_{pe}/c}^{k_{\max}} W_k dk$

слабой неустойчивостью. Иллюстрация к этому сценарию дана на рис. 10.1. Для упрощения задачи предположим, что пучок релятивистский, так что характерное волновое число для ленгмюровских волн порядка ω_{pe}/c . Это нижний предел для резонансного k , так как $v_b < c$. Одновременно эта точка будет особой для ленгмюровских волн. Как уже

отмечалось, доминирующая тенденция эволюции волн в рамках слабой турбулентности — перекачка их в длинноволновую область, и как раз эта точка, т. е. $\omega/k = c$, — граница, за которой резонанс уже невозможен. В то же время с точки зрения дисперсии ленгмюровских волн она почти ничем не выделена (есть, правда, некоторые нюансы в связи с возможной трансформацией в непотенциальную волну). Итак, при $k < \omega/c$ и будет происходить накопление плазмонов. (Нерелятивистский пучок рассматривать сложнее, но результат будет не слишком отличаться.) Плотность резонансных шумов W_1 была бы нулевой (точнее — на уровне флуктуаций), если бы в области накопления (W_2) не было диссипации. Если она имеет место, в резонансной области сохраняется некоторое превышение W_1 над уровнем флуктуаций, а значит, происходит и релаксация, и таким образом определяется длина пробега пучка.

В принципе эти рассуждения можно распространить практически на любую моду пучковой неустойчивости, не только ленгмюровскую. Но в то же время принципиальная неединственность нелинейных решений приводит к тому, что даже для одной ленгмюровской моды существует несколько вполне согласованных моделей этого сценария. Отметим, как наиболее совершенные, модели Рудакова (1970 г.) и Рютова (Брейzman и др., 1972 г.). Согласно первой из них, электронный пучок раскачивает в плазме почти одномерный спектр шумов — как и на квазилинейной стадии. Главный нелинейный процесс, перебрасывающий шумы по спектру — нелинейное рассеяние на ионах. При условии

$$\omega_{pe}/c \gg k_* = r_{De}^{-1}(v_{Ti}/v_{Te}), \quad (10.1)$$

т. е.

$$T_e/mc^2 \gg (m/M)(T_i/T_e),$$

трансформация спектра становится «эстафетной» с малой передачей импульса в каждом акте рассеяния:

$$\Delta k/k \approx k_*/k \ll 1. \quad (10.2)$$

Внимание! $\Delta k \neq |\Delta k|$, в каждом акте происходит процесс нелинейного отражения, описанный в гл. 9 (см. (9.9)). После многократного рассеяния спектр станет в k -пространстве изотропным и гладким (пунктирная линия на рис. 10.1). Левая граница этого распределения движется в направлении малых k . Рано или поздно k_{\min} станет меньше, чем k_* , и в области $0 < k < k_*$ начнется накопление плазмонов. Тогда вступает в игру еще один нелинейный процесс — индуцированное рассеяние плазмонов на электронах. Вообще говоря, он существенно слабее рассеяния на ионах:

$$\begin{aligned} \gamma_{iil} &\approx \omega_{pe} W/nT, \\ \gamma_{lei} &\approx \omega_{pe} (W/nT) (kr_{De})^3 \ll \gamma_{iil}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Следует, однако, принять во внимание, что рассеяние плазмонов на электронах не связано условием (10.2). Поэтому оно способно переносить кванты из области $k \approx \omega_{pe}/c$ прямо в длинноволновый «хвост» $k < k_*$. Это значит, что величину W , входящую в формулу для γ_{lei} , следует понимать как W_2 на рис. 10.1, т.е. плотность энергии в области спектра $k < k_*$. И если W_2 становится достаточно большой, то электрон-плазмонное нелинейное взаимодействие оказывается доминирующим, и именно оно должно балансировать квазилинейное возбуждение:

$$\gamma_{lei} \approx -\omega_{pe}(W_2/nT)k_1k_2^2r_{De}^3 = -\gamma_{qi}, \quad (10.4)$$

где γ_{qi} — квазилинейный инкремент, $k_1 \approx \omega_{pe}/c$, $k_2 \leq k_*$. Оценка для γ_{lei} в (10.4) сделана несколько более аккуратно, чем в (10.3) (см., например, книгу Цытовича, 1967 г.). Если величина W_2 настолько велика, что выполняется условие (10.4), то шумы не попадают в достаточном количестве в спектральный интервал $k_* < k < \omega_{pe}/c$, но в нем γ_{lei} также отрицательна, так что в конечном состоянии эта часть спектра оказывается пуста. Полного подавления неустойчивости, как мы уже понимаем, не происходит. Для оценки уровня резонансных шумов включим в рассмотрение кулоновские столкновения, которые обеспечат диссипацию в длинноволновой области спектра. Как следствие, и в резонансной области сохранится некоторый надтепловой уровень W_1 . Оценить его можно из уравнения баланса энергии:

$$\nu_{ei}W_2 = \gamma_{qi}W_1 \approx \omega_{pe}(W_1W_2/nT)k_1k_2^2r_{De}^3. \quad (10.5)$$

Подставив γ_{qi} , с помощью уравнения (10.4) получим из (10.5)

$$W_1 = nT(\nu_{ei}/\omega_{pe})(mc^2/T_e)^{3/2}(k_1/k_2)^2. \quad (10.6)$$

(Заметим, что величина $nT(\nu_{ei}/\omega_{pe})$ близка к плотности энергии тепловых флуктуаций.) Длину торможения пучка можно оценить, воспользовавшись уравнением квазилинейной релаксации

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial p_z} D_{pp} \frac{\partial}{\partial p_z} f.$$

Мы ограничились приближением одномерной диффузии, потому что и спектр шумов в квазистационарном состоянии будет почти одномерным. Дело в том, что линейный инкремент пучковой неустойчивости γ_{qi} имеет максимум при $\theta \equiv \angle \mathbf{k}\mathbf{v}_b = 0$, тогда как нелинейный γ_{lei} почти изотропен. А значит, в состоянии динамического равновесия суммарный инкремент равен нулю при $\theta = 0$ и отрицателен при $\theta > 0$. Это и означает, что фактически мы имеем дело с одно-

мерным спектром шумов. Коэффициент квазилинейной диффузии (4.17) для данного сугубо релятивистского случая можно переписать в виде

$$D_{pp} \cong \pi \omega_{pe}(m/n) \int dk (\omega/kc) \delta(\omega/kc - \cos \theta) W_k. \quad (10.7)$$

Грубая оценка:

$$\langle \Delta p^2 \rangle \approx D_{pp} L/c \approx p_0^2, \quad (10.8)$$

где L — длина торможения относительно потери продольного импульса, а p_0 — начальный импульс электронов пучка. Поскольку угловое распределение шумов является узким,

$$W_1 \approx \int_{\omega_{pe}/c}^{k_{\max}} 2\pi k^2 dk d \cos \theta W_k \approx \pi k_1^3 W_k \langle \theta^2 \rangle, \quad (10.9)$$

где $\langle \theta^2 \rangle$ — усредненная угловая ширина пучка («эмиттанс»). Из (10.7) следует оценка:

$$D_{pp} \approx \pi \omega_{pe}(m/n)(\omega/c) 2\pi k^2 W_1 / \pi k_1^3 \langle \theta^2 \rangle \approx \\ \approx 2\pi \omega_{pe}(m/n)(\omega/k_1 c) \langle \theta^2 \rangle^{-1} W_1. \quad (10.10)$$

Далее, $(\omega/k_1 c) \approx 1$ и $p_0^2 = m^2 c^2 \gamma^2 \beta^2$, где γ — только для данной оценки! — не инкремент, а релятивистский фактор, а $\beta = v_b/c$. Возьмем, простоты ради, $\gamma \gg 1$, соответственно $\beta \cong 1$. Подставляя (10.10) в (10.8), а в результат — (10.6) (пусть это будет упражнением для читателя), получаем окончательную оценку:

$$L(p) \equiv L(\gamma) \approx (\gamma^2/2\pi)(v_{Te}/v_{ei}) \langle \theta^2 \rangle (k_2/k_1)^2. \quad (10.11)$$

Учтя еще раз, что $k_1 \approx \omega_{pe}/c$, $k_2 \approx k_*$, можно получить эквивалентную форму ответа:

$$L(\gamma) \approx \lambda_C(p) (T_e/mc^2)^2 \langle \theta^2 \rangle (k_* c/\omega_{pe})^2, \quad (10.12)$$

где λ_C — кулоновская длина торможения. Таким же образом может быть рассмотрен и случай $T_e/mc^2 < m/M$. Но здесь уже главным оказывается процесс плазмон-ионного рассеяния. По тому же принципу строится сценарий, в котором главную роль играет процесс плазмон-ион-фотон; можно также учесть влияние ионно-звуковых шумов, которые в такой системе могут возбуждаться обратным током пучка.

Модель Рютова (Брейзман и др., 1972 г.) отличается двумя существенными моментами.

1. Предполагается, что в режиме стационарной инжекции должен возбуждаться широкий спектр ($\langle \theta_k^2 \rangle \approx 1$), соответственно и угловое распределение пучка должно быть широким ($\langle \theta^2 \rangle \approx 1$). Полезно заметить, что такое предположение может быть корректно лишь при условии достаточной ширины резонансной области спектра, $\Delta k_{\text{res}} > k_*$.

2. Не предполагается возможность накопления плазмонов. Точнее, предполагается, что в области малых k работает какой-то достаточно эффективный механизм диссипации, так что стабилизация неустойчивости происходит только за счет эстафетной перекачки на ионах в интервале волновых чисел $k_* < k < \omega_{pe}/c$. Как пример такого процесса, препятствующего накоплению, можно рассматривать излучение поперечных волн на частоте $2\omega_{pe}$ (см. рис. 7.4а), но для него необходимо выполнить условие $\langle \theta_k^2 \rangle \approx 1$. На эту роль могут также претендовать некоторые эффекты сильной ленгмюровской турбулентности, которые нам еще предстоит обсудить в гл. 13–15.

Используя модель Рютова, эффективную длину пробега пучка можно оценить следующим образом. Энергия, переносимая от неустойчивых k в область переизлучения или диссипации, должна быть равна энергии, которую пучок вкладывает в резонансные шумы:

$$\gamma_{\text{ил}} W_1 = \gamma_{\text{ql}} W_1, \quad (10.13)$$

$$\gamma_{\text{ql}} \cong \omega_{pe} (n_b/n\gamma) (\omega_{pe}/kc)^2 \langle \theta^2 \rangle^{-1}.$$

Чтобы получить $\gamma_{\text{ил}}$, нужно подставить плотность энергии W_1 , характерную для спектрального интервала $\Delta k \approx k_*$, в уравнение (10.3). При этом, рассматривая уравнение (10.7), необходимо учитывать, что теперь мы имеем дело с широкими спектрами волн и частиц, $\theta, \theta_k \approx 1$. Таким образом, может быть получен следующий результат:

$$L(\gamma) \cong (c/\omega_{pe}) (n\gamma^3/n_b) (m/M) (mc^2/T_e)^2. \quad (10.14)$$

При обычных параметрах эксперимента длина пробега, определяемая формулой (10.14), будет много больше той, которая следует из (10.11), (10.12), а в плотной мишенной плазме — даже больше кулоновской длины пробега. Границы применимости обеих моделей, казалось бы, легко установить, сравнивая интенсивность шумов в неустойчивой части спектра W_1 . На самом деле все не так просто.

Прежде всего, результаты (10.12) и (10.14) получены в рамках модели слабой турбулентности с использованием оценок вместо точных решений. Шумы предполагались изотропными при $k < k_*$ в пер-

вой из них и при $k_* < k < k_{\max}$ — в другой. Но сегодня мы уже знаем, что точное решение уравнения

$$\gamma_{\text{ил}}(W_k) + \gamma_{\text{ql}}(f_p) = 0 \quad (10.15)$$

приводит к нетривиальным «струйным» спектрам в области $k > k_*$ (см. (9.11), а также работу Брейзмана и др., 1973 г.). Такой спектр обращает правую часть в нуль на «струе» в k -пространстве; вне «струи» она будет меньше нуля. Тогда и только тогда первое из уравнений (10.13) сведется к тривиальному равенству инкрементов.

Этот факт в особенности влияет на потери энергии через излучение на частоте $2\omega_{\text{pe}}$, обусловленное трехплазмонным взаимодействием. Оно просто не будет работать, если в спектре нет волн с волновыми числами порядка $k_1 \approx 3^{1/2}\omega_{\text{pe}}/c$, т. е. $\theta \approx 1$. (Это относится, конечно, только к релятивистским пучкам.) В противном случае получилось бы $(k_1)_{\max} \leq 2\omega_{\text{pe}}/c$, но тогда закон дисперсии $2\omega_{\text{pe}} = (\omega_{\text{pe}}^2 + k_1^2 c^2)^{1/2}$ не может быть удовлетворен. К тому же, модели трудно сравнивать еще и потому, что нагрев, распад или удержание плазмы обусловлены плазменно-пучковым взаимодействием, но, в свою очередь, взаимодействие само оказывается подвержено влиянию этих процессов. Включив в рассмотрение все эффекты, имеющие отношение к делу, мы едва ли вообще сможем что-либо сравнивать. Наконец, сама теория слабой турбулентности в режиме накопления плазмонов в области малых k довольно быстро теряет силу (см. гл. 12).

По всей видимости, обе модели могут соответствовать тем или иным экспериментальным ситуациям (или, быть может, ни одной в достаточной степени), но простая оценка границ их применимости едва ли была бы корректной. Может оказаться, что при одних и тех же параметрах пучка и плазмы длина торможения будет меняться в зависимости от «косметического» изменения условий эксперимента.

Рано или поздно физик, занятый построением таких сложных сценариев, задает себе неизбежный вопрос: достаточно ли прочны «кирпичи» для такой конструкции? Иными словами: достаточно ли надежны основные элементы, из которых мы строим динамику? Между тем, результаты используются для объяснения и последующего планирования экспериментов — быть может, весьма дорогих. Это одна из причин, не всегда осознанных, того, что рядом с термоядерными и другими программными экспериментами ведутся гораздо более скромные по масштабу работы, в которых проверяются базовые физические идеи или идентифицируются фундаментальные физические эффекты. (Мы не можем удержаться от упоминания многочисленных прецизионных работ, выполненных Дж. Малмбергом с сотрудниками.) Большинство фундаментальных эффектов, упомянутых в этой книге и многих других, как линейных, так и нелинейных, наблюдались в подобных экспериментах. Такая необхо-

димось и в будущей физике плазмы не исчезнет, несмотря на «взрывное» развитие вычислительной техники и численного эксперимента. Как ни в одной другой области физики, плазмист имеет дело с «грязной» системой, которая с трудом поддается формализации и всегда оставляет вопрос о возможности расширительного толкования рафинированных результатов теории. Физик-экспериментатор работает с реальной установкой, и свойства этой установки легко смешиваются с физикой плазмы. В то же время теория и численный эксперимент всегда идеализированы, хотя и по-разному. «Сшить» эти два компонента физики плазмы не всегда просто, и делать это приходится, ставя в соответствие эффекты, а не цифры. (Это одна из главных причин того, что в физике плазмы чисто вычислительные работы непопулярны.) Эксперимент, «наводящий мосты», должен быть либо абсолютно прецизионным по постановке, либо отвечать на вопрос типа «да или нет?». Как пример рассмотрим эксперимент, в котором впервые однозначно идентифицирован эффект нелинейной стабилизации пучковой неустойчивости (Закатов и др., 1973 г.).

Как уже отмечалось выше, наиболее эффективный нелинейный процесс для некогерентных ленгмюровских волн — индуцированное рассеяние плазмонов на ионах, идущее с характерной нелинейной частотой $\gamma_{\text{ин}} \approx \omega_{\text{pe}} W/nT$. В большинстве пучковых экспериментов

$$\epsilon/T_e \ll MT_e/mT_i \quad (10.16)$$

(для релятивистских пучков см. уравнение (10.1)); отсюда следует $k_{\text{unst}} \gg k_*$, а в широком спектре это ведет к эстафетной перекачке, которую можно описать с помощью некоторого дифференциального оператора, действующего на функцию распределения волн N_k . Так получается из-за многократных отражений с малой потерей величины $|k|$ в каждом акте (см. (9.9)). Вместо того чтобы наблюдать этот не очень выразительный эффект, лучше стимулировать перекачку между двумя узкими линиями, которая рассматривалась в гл. 9.

Предположим, что два встречных пучка инжектируются в плазму, причем их энергии удовлетворяют условию (10.16), а разность этих энергий — следующему условию:

$$1 \gg (\epsilon_2 - \epsilon_1)/\epsilon_{1,2} \approx \delta \equiv (mT_i/MT_e)^{1/2} (\epsilon_{1,2}/T_e)^{1/2}. \quad (10.17)$$

Формула (10.17) есть не что иное, как условие нелинейного резонанса:

$$\begin{aligned} \frac{\omega''}{i} k'' v_{Ti} &= \frac{3}{2} \left(\frac{k^2 - k'^2}{k + k'} \right) \frac{r_{\text{De}}^2 \omega_{\text{pe}}}{v_{Ti}} = \frac{3}{2} \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} r_{\text{De}} \delta k = \\ &= \frac{3}{2} \frac{v_{Te}}{v_{Ti}} k r_{\text{De}} \frac{\delta k}{k} \cong \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_{1,2}}. \end{aligned} \quad (10.18)$$

В результате более энергичный пучок, генерирующий меньшие $k \propto \varepsilon^{-1/2}$, создает как раз те шумы, которые могут стабилизировать неустойчивость второго пучка. Но чтобы реализовать эффект, должно выполняться еще и условие на интенсивность шумов:

$$W/nT > (n_b/n)(v_b/\Delta v_b)^2 \approx n_b \varepsilon / (n \Delta \varepsilon), \quad (10.19)$$

где W соответствует стабилизирующему пучку, тогда как n_b , ε , $\Delta \varepsilon$ — параметры пробного пучка. Необходимое значение δ подбиралось экспериментально, потому что ни электронная, ни тем более ионная температуры не были известны с достаточной точностью.

Зеркальная ловушка заполнялась плазмой с электронной концентрацией $(2 \div 5) \cdot 10^{12} \text{ см}^{-3}$. Магнитное поле достигало 1 кГс в центре установки и 5 кГс в пробках. Стабилизирующий пучок включался одновременно с инжекторами, а пробный — с задержкой в 100–300 мкс. Длительность импульса каждого пучка составляла около 250 мкс. Сравнивались два режима эксперимента: одновременное и последовательное включение стабилизирующего и зондирующего пучков (использовать только зондирующий пучок было бы неправильно, так как плазменные параметры, а с ними и взаимодействие зависят от энергоуклада, так что в обоих режимах нужно включать оба пучка).

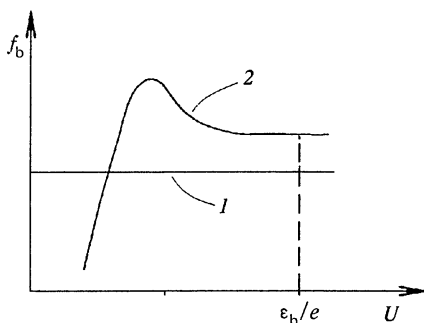


Рис. 10.2. Функция распределения электронного пучка $f(\varepsilon_{\parallel})$, $\varepsilon_{\parallel} = mv_{\parallel}^2/2$, $v_{\parallel} \parallel v_{b0}$: 1 — зондирующий пучок после релаксации, 2 — то же в случае влияния встречного стабилизирующего пучка

Чтобы облегчить анализ зондирующего пучка, пучки инжектировались не точно навстречу, а были немного смещены по отношению друг к другу, но оставались очень близки и распространялись параллельно оси установки. Этого вполне достаточно для эффекта, который следовало получить, потому что нелинейная связь и следующая из нее стабилизация обусловлены взаимодействием волн, а не частиц напрямую. Небольшой угловой разброс этих волн ничего не меняет. Анализ пучка по энергиям осуществлялся посредством многосеточного электростатического зонда. Его сигнал

обрабатывался так, чтобы в результате получилась функция распределения пучка.

Результат представлен на рис. 10.2. Можно видеть, что при раздельной инжекции (долгая задержка) зондирующий пучок на выходе из установки демонстрирует уже известное нам плато (кривая 1). В случае малой задержки, т. е. одновременной инжекции, это плато оказывается «недоразвитым». Едва ли можно ожидать в таком эксперименте абсолютной стабилизации: по слишком многим причинам частичная релаксация все же должна произойти. Но эффект достаточно выразителен, чтобы заключить, что в данном случае природа отпустила «да». Измерялись, конечно, и другие параметры, что давало дополнительную уверенность в успехе. В частности, эффективность излучения на частоте $2\omega_{pe}$, сопровождавшего раздельную инжекцию, оказалась в полтора раза выше, чем при одновременной инжекции. Нагрев плазмы при раздельной инжекции также оказался заметно эффективнее. Но главный аргумент все же представлен на рис. 10.2. Мы уже отмечали, что точное значение расстройки δ трудно определить заранее. Взяв, например, токи и энергию частиц пучков $I_{b1} = I_{b2} = 10$ А и $\langle \epsilon \rangle = 12$ кэВ, получим следующий оптимум: $\epsilon_1 - \epsilon_2 = (1 \div 2)$ кэВ, т. е. $\delta_{opt} \approx 0,1$. И еще один интересный результат: при изменении δ от δ_{opt} до нуля эффект исчезал плавно, но если взять $\delta > \delta_{opt}$, эффект пропадает «грубо», скачком. Такая зависимость очень хорошо согласуется с функциональной зависимостью нелинейной частоты рассеяния от $(k - k')$:

$$\gamma_{iii} \propto \exp \left[-\omega'^2 / 2k''^2 v_{T1}^2 \right].$$

Ряд экспериментов по прямому измерению эффектов индуцированного рассеяния (а еще раньше — затухания Ландау) поставлен Малмбергом и Уортоном, Джентлом и другими физиками-экспериментаторами. В целом экспериментально полученный массив информации подтверждает хорошее качество теоретического базиса. (С трехплазмонными процессами таких проблем нет — об этом можно судить даже просто по прочтении гл. 12.)

Аномальное сопротивление и турбулентный нагрев плазмы. Ионно-звуковой режим. Динамика нагрева. Проблема убегающих электронов

Без сомнения, задача о сопротивлении относится к числу наиболее фундаментальных в любой области физики плазмы. Соответственно среди наиболее продвинутых разделов теории плазменной турбулентности мы находим теорию аномального сопротивления и турбулентного нагрева плазмы. Существует ряд обзоров по данной теме — Галеева и Сагдеева (1973 г.), де Клайвера (1977 г.), Кингсепы (1991 г.), а в них — множество ссылок. В настоящей главе нам придется ограничиться лишь достаточно кратким введением в проблему, без которого, однако, представление о нелинейной физике плазмы осталось бы неполным.

Турбулентный нагрев плазмы открыт в 1961 г. одновременно группой Завойского в Москве и — в контексте аномального сопротивления — группой Файнберга в Харькове. Типичная экспериментальная установка изображена на рис. 11.1. Идея эксперимента, как обычно при исследовании сопротивления, проста: прямой разряд в продольном внешнем магнитном поле. Возможны некоторые модификации, как то: тороидальный турбулентный разряд, ток, текущий перпендикулярно магнитному полю (в ударных волнах), нулевое магнитное поле (в лазерной короне) и т.д. Как правило, внешнее магнитное поле достаточно слабо, чтобы выполнялось условие

$$\omega_{Be} < \omega_{pe}. \quad (11.1)$$

В принципе оно никак не является жестким ограничением. Например, в сильноточных системах обычно по порядку величины справедливо следующее равенство (магнитного и газокINETического давлений): $B^2 \approx nT$, тогда как (11.1) эквивалентно следующему: $B^2 < mnc^2$. Поэтому допускается магнитное поле в ловушке, даже и много большее собственного поля тока. В настоящей главе мы ограничимся лишь такими ситуациями, когда (11.1) выполнено, гарантируя тем самым, что сценарий нагрева (но не последующего удержания тепла и частиц) от

магнитного поля не зависит. Можно провести вполне корректные рассуждения в поддержку этого факта (см. ниже), но пока нам удобнее будет принять его в качестве экспериментального, установленного с достаточной степенью надежности. Характерные значения основных

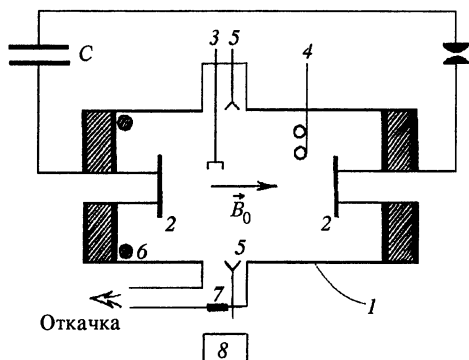


Рис. 11.1. Типичная установка для турбулентного нагрева плазмы: 1 — вакуумная камера, 2 — электроды/плазменные инжекторы, 3 — двойной электрический зонд, 4 — магнитные зонды, 5 — ВЧ-диагностики, 6 — пояс Роговского, 7 — рентгеновское окно, 8 — электронно-оптический преобразователь

параметров варьировались от установки к установке; давайте примем за основу набор параметров, типичных для экспериментов по турбулентному нагреву в открытых ловушках: $n \approx (10^{12} \div 10^{14}) \text{ см}^{-3}$, внешнее электрическое поле $E \approx 1 \text{ СГС} = 3 \cdot 10^4 \text{ В/м}$, рабочая плотность тока $j \approx 10^2 \text{ А/см}^2$. Сам по себе эффект состоял в следующем: в течение очень короткого времени (скажем, $0,2 \div 0,6 \text{ мкс}$) энергосодержание плазмы возросло до $10^{15} \div 10^{16} \text{ эВ/см}^3$, что соответствовало очень высокой температуре электронов — несколько килоэлектронвольт, даже до 10 кэВ при достаточно разреженной плазме в ловушке. Измеренная ионная температура была порядка $100 \div 300 \text{ эВ}$, хотя именно этот параметр измерялся с меньшей точностью, потому что ионные диагностики еще не получили в то время должного развития. Тем не менее, эффект был впечатляющим, и никакой классический (т.е. кулоновский) механизм не мог бы служить ему объяснением. Этим и оправдывается термин «аномальное сопротивление»; с другой стороны, принято говорить «турбулентный нагрев плазмы», что прямо указывает на природу эффекта.

Далее обнаружилось новое принципиальное обстоятельство. С самого начала исследований по физике горячей плазмы считалось, что любые неустойчивости вредны, поскольку укорачивают время жизни объекта. Самый неприятный прогноз, связанный с неустойчивостями, — разрушение плазменного столба как следствие гидродинамических неустойчивостей или, по крайней мере, катастрофические

потери тепла и частиц на стенку, которые можно количественно представить так называемым бомовским коэффициентом диффузии:

$$D_B \approx v_{Te}^2 / \omega_{Be} \approx v_{Ti}^2 / \omega_{Bi} \approx cT / eB. \quad (11.2)$$

Этот коэффициент диффузии стоит нескольких слов сам по себе. Если взять стандартную формулу для замагниченной диффузии

$$D_{e,i} = v_{Te,i}^2 \tau / [1 + (\omega_{Be,i} \tau)^2], \quad (11.3)$$

а потом поискать максимум в зависимости от $\omega_B \tau$, где τ — характерное столкновительное время, то получится $(\omega_B \tau)_{opt} \approx 1$ и в результате — выражение (11.2). В некоторых частных случаях можно дать частные доказательства (как это и сделано в оригинальной работе Бома), но правильнее будет просто считать, что (11.2) дает нам максимальный поток частиц в рамках диффузионного приближения. Если диффузия или теплопроводность следуют бомовскому закону, характерное время потерь становится, как правило, неприемлемо коротким, чтобы говорить о каких-либо термоядерных перспективах.

Оказалось, однако, — и это второй эффект, следующий из экспериментов по турбулентному нагреву, — что среди неустойчивостей существует определенная иерархия. Мелкомасштабные неустойчивости кинетической природы, в частности потоковые неустойчивости, не столь уж безнадежно портят удержание тепла и самих частиц, но могут весьма способствовать нагреву. Механизм такого нагрева напрямую не связан со столкновениями, хотя тонкие детали могут и включать элементы столкновительной динамики (см. гл. 3). Эта возможность выглядит достаточно привлекательной с точки зрения термоядерных приложений. Действительно, кулоновская проводимость очень быстро растет с температурой, $\sigma \sim T^{3/2}$. Поэтому токовый нагрев (а заодно и все механизмы столкновительной диссипации) оказывается малоэффективным при переходе к термоядерным температурам. Аномальное сопротивление в принципе позволяет этой трудности избежать.

Известны разные режимы аномального сопротивления и турбулентного нагрева плазмы, но мы остановимся лишь на одном, а именно: ионно-звуковом режиме. Он наиболее важен как при токовом нагреве плазмы в открытых ловушках, так и в бесстолкновительных ударных волнах. В незамагниченной плазме это кажется совершенно естественным, так как именно ионно-звуковая токовая неустойчивость имеет в этом случае самый низкий порог по плотности тока. Но и в умеренном магнитном поле (см. условие (11.1)) этот механизм обычно играет главную роль. Дело в том, что такое поле не меняет закон дисперсии ионного звука. Хотя ω_{Be} может быть и больше, чем ω_s , но остается, пока справедливо

соотношения (11.1), меньше, чем kv_{Te} , по крайней мере для коротких волн, когда $k \approx r_{De}^{-1}$:

$$kv_{Te} \approx v_{Te}/r_{De} \approx \omega_{pe} \gg \omega_{Be}. \quad (11.4)$$

Тогда линейный закон дисперсии (4.23), (4.24) остается в силе. Во внешнем магнитном поле могут вступить в игру новые неустойчивости, может случиться, и с более низким порогом, чем следующий из линейной теории порог возбуждения неустойчивости ионного звука:

$$j \equiv neu > nec_s. \quad (11.5)$$

Последний, однако, сохраняет преимущество по причине «тяжелого кванта» — он имеет большой импульс (r_{De}^{-1}), но малую энергию (ω_{pi}). Это очень удобно для переносчика импульса. Дело в том, что в задаче о сопротивлении не следует проводить отбор неустойчивостей на основании простого сравнения порогов и инкрементов; нужно исходить скорее из чего-то вроде принципа Ле Шателье—Брауна. Резистивный режим есть динамическое равновесие, и он связан с балансом импульса. Электроны, получая импульс от внешнего электрического поля, передают его шумам,

$$neE = \int \mathbf{k}(\partial N_k/\partial t)^e d\mathbf{k} = \int 2\gamma_k^e(\mathbf{k}/\omega) W_k d\mathbf{k}, \quad (11.6)$$

где γ_k^e — электронный вклад в полный инкремент, W_k — спектральная плотность энергии. Шумы, в свою очередь, переносят этот импульс от электронов к ионам:

$$-\int 2\gamma_k^i(\mathbf{k}/\omega) W_k d\mathbf{k} = Zen_i E = neE. \quad (11.7)$$

Таким образом, чем больше отношение k/ω , тем меньше должна быть спектральная плотность энергии при данном темпе передачи импульса, т. е. тем эффективнее квант данной моды в качестве промежуточного агента. Отсюда можно заключить, что ионный звук имеет все шансы оказаться победителем в соревновании за право обеспечить аномальное сопротивление, если только выполнено неравенство (11.1). Его фазовая скорость оказывается при этом наименьшей; что же касается прочих мод, более низкочастотных, они, как правило, просто стабилизируются квазилинейными эффектами.

Рассмотрим более детально проблему ионно-звукового порога неустойчивости. Удобно записать все инкременты в системе отсчета, связанной с неподвижными ионами (а на самом деле она практически совпадает с лабораторной системой отсчета). Пусть электроны движутся с некоторой токовой скоростью \mathbf{u} , которую приближенно можно представить как сдвиг максвелловского распределения в пространстве

скоростей. Тогда электронный инкремент можно получить из уравнения (4.31). В предположении $u \ll v_{Te}$ вычисления дают:

$$\begin{aligned} \gamma^e &= (\pi/2)(\omega^3/k^2)(M/m) \int d\mathbf{v} (\mathbf{k} \partial f^e / \partial \mathbf{v}) \delta(\tilde{\omega}) \cong \\ &\cong (\pi/8)^{1/2} (\mathbf{k}\mathbf{u} - \omega)(\omega/kv_{Te})^3 (M/m) \end{aligned} \quad (11.8)$$

(полезно сравнить результат с (4.32)). Ионный вклад в инкремент можно вычислить для изотропной функции распределения, воспользовавшись формулой (2.31):

$$\gamma^i \cong -\pi^2 \omega [v^3 f^i(v)]_{v=\omega/k}. \quad (11.9)$$

Далее запишем стандартное уравнение

$$\sum_{\alpha=i, e} \gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} = 0. \quad (11.10)$$

Ему, однако, невозможно удовлетворить для широкого спектра, но лишь для узкой линии (частный случай «струи» в \mathbf{k} -пространстве), которую можно найти при дополнительном условии

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{k}} \sum_{\alpha=i, e} \gamma_{\mathbf{k}}^{\alpha} = 0. \quad (11.11)$$

Все прочие значения волнового вектора соответствуют затуханию, а единственное, которое мы найдем из уравнений (11.10), (11.11), как раз и определяет пороговую неустойчивую моду. Мы не станем вычислять порог, поскольку не нуждаемся в линейном результате — резистивная плазма всегда «столкновительна» à priori (неважно, что это за столкновения — классические или коллективные). Из (11.8) видно, что $u \geq c_s$. Точное же вычисление этой величины оказывается вообще бессмысленным — сам вопрос должен быть переформулирован.

Электронная функция распределения плазмы со столкновениями не может быть представлена в виде сдвинутой максвелловской; грамотное ее вычисление проводится на базе системы (4.33)–(4.36) методом Энского (Рудаков и Кораблев, 1966 г.). Метод в достаточной степени сложен технически, поэтому мы и ограничимся простой оценкой $u \approx c_s$. Эта оценка должна пониматься в смысле некоторого усреднения, поскольку методом Энского определяется не скорость, а поток электронов. Более точное значение этой величины зависит от отношения T_i/T_e . Как мы уже знаем, ионный звук может существовать только в сильно неизотермической плазме, $T_i/T_e \ll 1$ (гл. 4). Если же это неравенство не выполнено, то порог возбуждения потенциальных волн оказывается близок не к c_s , а к тепловой скорости электронов v_{Te} . При этом неустойчивая мода по своим характеристикам уже заметно отличается от ионного звука.

Пусть $T_e \approx T_i$. Поскольку ω/k оказывается близко к v_{Ti} , для ионного звука $\gamma \approx -\omega$, так что классический ионный звук при этом условии не существует. Тогда нет и сопротивления в широком диапазоне токовых скоростей (чисто столкновительными эффектами для простоты пренебрегаем). Токовая скорость беспрепятственно возрастает, пока не достигнет величины порядка электронной тепловой скорости, но это уже явно соответствует гидродинамической двухпотоковой неустойчивости:

$$\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2 / [(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^2 - k^2 v_{Te}^2] - \omega_{pi}^2 / \omega^2 = 0. \quad (11.12)$$

При $u \ll v_{Te}$ из этого уравнения не следовало ничего, кроме незначительной модификации закона дисперсии. Рассмотрим обратный предел. Введя обозначение

$$\Omega = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u},$$

получаем уравнение, нам уже известное (см. (2.32)):

$$1 - \omega_{pe}^2 / \Omega^2 - \omega_{pe}^2 (m/M) / (\Omega + \mathbf{k}\mathbf{u})^2 = 0, \quad (11.13)$$

так что и решение его мгновенно может быть написано (см. (2.34)):

$$\mathbf{k}\mathbf{u} \cong -\omega_{pe}, \quad \Omega \cong \omega_{pe}, \quad \Gamma \cong \text{Im } \Omega = (3^{1/2}/2^{4/3})(m/M)^{1/3} \omega_{pe}. \quad (11.14)$$

Обратная подстановка возвращает этот результат в лабораторную систему отсчета:

$$\omega = \Omega + \mathbf{k}\mathbf{u} \cong 0, \quad \gamma \approx \omega_{pe} (m/M)^{1/3}. \quad (11.15)$$

Эту низкочастотную аperiодическую неустойчивость обычно называют неустойчивостью Бунемана. Заметим, что неравенство $kv_{Te} \ll \gamma$ — необходимое условие применимости этих формул, поскольку оно прямо использовалось при решении уравнения (11.12). Это значит, что мы получили длинноволновый предел бунемановской неустойчивости: $k r_{De} \ll (m/M)^{1/3}$. В пределе коротких волн результат немного не похож на (11.15), но это для нас не так уж важно. Мы показали, что нечто похожее на ионно-звуковую неустойчивость тока, а значит, и на аномальное сопротивление, существует и в изотермической плазме.

Попытаемся теперь распространить идею уравнения (11.6) на оценку эффекта нагрева плазмы:

$$\partial n(T_e + T_i) / \partial t \approx \mathbf{j}\mathbf{E} = \int 2\gamma_k^e W_k(\mathbf{k}\mathbf{u}/\omega) d\mathbf{k}. \quad (11.16)$$

С другой стороны, в системе отсчета неподвижных ионов

$$\partial n T_i / \partial t = \int 2\gamma_k^i W_k d\mathbf{k}. \quad (11.17)$$

А теперь разделим почленно (11.16) на (11.17). В итоге получаем очень грубую, но весьма любопытную оценку:

$$\dot{T}_e / \dot{T}_i \approx \mathbf{ku} / \omega - 1. \quad (11.18)$$

Ее называют формулой Сагдеева. Правая часть (11.18) всегда больше единицы. Таким образом, если обе температуры возрастают многократно, это с неизбежностью ведет к ситуации $T_e \gg T_i$, при которой бунемановская неустойчивость обязана уступить место ионно-звуковой. При этом токовая скорость падает, и к сценарию подключается нетривиальная кинетика. Можно было бы дополнить приведенную выше аргументацию соображениями сугубо кинетическими, но столь детальное рассмотрение выходит за рамки настоящей книги.

Ионно-звуковая концепция аномального сопротивления подкрепляется огромным массивом экспериментальных данных, в числе которых регистрация высокочастотного излучения из плазмы, нелинейное рамановское рассеяние внешней зондирующей ВЧ-волны, исследование вистлеров (геликонов), излучаемых плазмой с высоким уровнем ионно-звуковой турбулентности, зондирование плазмы электронным пучком, рентгеновские измерения, эффект Штарка (уширение спектральных линий оптического излучения из плазмы из-за осциллирующих электрических полей), рассеяние лазерного света и т.д.; заметим, что перечислены только бесконтактные диагностики как единственно заслуживающие доверия при исследовании такого объекта. Идея ионно-акустической природы аномального сопротивления и турбулентного нагрева плазмы подтверждена в целом, исследовано множество аспектов ее реализации в турбулентном разряде. Попробуем теперь, не входя в детали, дать краткий обзор теоретических достижений в этой области.

Рассмотрение замкнутых теоретических моделей потребовало бы перехода на новый математический уровень, вычисления при этом оказались бы весьма громоздкими. Простые же оценки в нелинейной физике часто ненадежны. К тому же, для сложных нелинейных задач, вообще говоря, характерна неединственность и/или неэволюционность (мы познакомились с этим свойством в гл. 10). Поэтому в качественных рассуждениях нужно соблюдать осторожность.

На первый взгляд, для этой проблемы необходимо сконструировать нелинейную иерархию, как это делается в задаче о системе «плазма-пучок». Но в задаче о сопротивлении дело выглядит несколько сложнее. В случае пучка мы предполагали квазилинейную теорию приближением первого порядка, располагая ее сразу над «первым этажом» — линейной теорией. Это как раз и привело бы к тому, что потоковая неустойчивость была бы стабилизирована где-то недалеко от порога $u \approx c_s$. Кроме того, это означало бы, что ха-

ракетная нелинейная частота должна быть порядка характерного квазилинейного инкремента (11.8):

$$\gamma_n \approx \omega W/nT \ll \gamma_1 \approx \omega(u/c_s)(m/M)^{1/2}, \quad (11.19)$$

где мы положили $\mathbf{ku} - \omega \approx ku$. Напомним, что доминирующий эффект при взаимодействии электронов с ионным звуком — рассеяние по углам без заметной потери энергии (см. уравнение (4.37)):

$$v_{ef} \cong v_{\theta\theta} \approx \omega_{pe} W/nT. \quad (11.20)$$

Вместе уравнения (11.19), (11.20) имеют следствием неравенство

$$(u/c_s)(m/M)^{1/2} \gg v_{ef}/\omega_{pe}. \quad (11.21)$$

Объединим уравнение (11.21) и оценочную форму закона Ома:

$$neu = j = \sigma E \approx (\omega_{pe}^2/v_{ef})E. \quad (11.22)$$

В результате получим

$$E \ll (u/c_s)(m/M)^{1/2}(neu/\omega_{pe}) \approx (m/M)(8\pi nT_e)^{1/2}. \quad (11.23)$$

Мы ввели фактор 8π для удобства — так обычно делают при сравнении плотности энергии поля с тепловым энергосодержанием. Это очень важная оценка. Только в таком достаточно слабом электрическом поле стандартная нелинейная иерархия работает надлежащим образом. Этот предельный случай реализуется в тороидальных системах или в космической плазме (но абсолютно не характерен для турбулентного прямого разряда). Квазилинейная теория ионно-звуковой неустойчивости тока впервые была построена Рудаковым и Кораблевым (1966 г.). Как выразительный пример приведем их решение для спектра ионно-звуковых шумов (его называют спектром Рудакова):

$$W_k = W_0 \delta(k - k_0) z^2 (4 - 3z) [1 - z(1 - \varepsilon)]^{-2}, \quad (11.24)$$

где $z = \cos \angle \mathbf{jk}$, $W_0 = \omega mn / [(2\pi)^4 \omega_{pi}^2 e f^e (\omega/k)]$, $\varepsilon \sim t^{-1}$.

В продолжение этой работы автором настоящей книги была построена и нелинейная теория, а дальше последовало множество работ, ее улучшающих, на которых мы останавливаться не будем. Но одна общая особенность должна быть упомянута. Речь идет о главном нелинейном процессе в иерархии. Полезно повторить еще раз: не соревнование линейных инкрементов, но баланс импульса определяет основные характеристики в задаче о сопротивлении. В частности, ни трехплазменные процессы, ни рассеяние шумов на электронах не могут быть определяющими для квазистационарного состояния. Только рассеяние на ионах, линейное или нелинейное, способно сыграть эту роль. Чаще всего квазилинейный эффект резо-

нансного затухания на ионах оказывается малоэффективным из-за их малого числа и, как следствие, перегрева. Кроме того, если только резонансные ионы обеспечивают баланс импульса, нерезонансные ($v < c_s$), а их большинство, должны ускоряться более или менее свободно во внешнем электрическом поле. А это уже не совсем стационарное состояние. Во всяком случае, ясно, что «квазилинейным» в прямом смысле оно быть не может — все основные величины должны быть существенно перенормированы. Нелинейное индуцированное рассеяние ионно-звуковых волн на ионах выглядит с этой точки зрения более привлекательным (рис. 11.2). Но, между прочим, оно сохраняет полное число квантов (плазмонов). Они лишь теряют энергию и импульс, при этом перебрасываясь в нерезонанс-

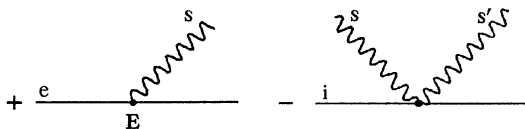


Рис. 11.2. Основные процессы, определяющие квазистационарное состояние

ную (с нелинейной точки зрения) область спектра, где и затухают. Детали механизма затухания в данном случае не важны, потому что уровень турбулентности и проводимость, а равно и характер нагрева плазмы во всех деталях совершенно определяются двумя процессами, изображенными на рис. 11.2.

Вообще говоря, стабилизировать неустойчивость — со всеми вытекающими последствиями — может и градиент плотности плазмы. Только в этом случае импульс шумов отдается не ионам как таковым, а среде как целому, в соответствии с уравнением (4.39) (см. также (4.44)). Если ток протекает перпендикулярно магнитному полю, как в ударной волне, квазистационарное состояние возможно и в рамках одной только квазилинейной теории (импульс могло бы принять магнитное поле), но здесь некоторые проблемы еще предстоит решить.

Много результатов, как оценок, так и решений, получено в пределе, противоположном (11.23), т. е. в пределе сильной нелинейности. Он в большей степени соответствует экспериментам по нагреву плазмы в открытых ловушках. В отличие от случая слабого электрического поля, нелинейная частота здесь оказывается порядка линейного инкремента, а не малой его части, несбалансированной в результате квазилинейной релаксации. Используя оценки

$$\gamma^e \approx \omega u / v_{Te}, \quad \gamma_n = \gamma_{\text{sis}} \approx \omega (T_i / T_e) (W / n T_e) \quad (11.25)$$

и уравнение (11.20), нетрудно получить

$$j \cong nec_s (M T_i / m T_e)^{1/2} (E^2 / 8 \pi n T_e)^{1/4} \quad (11.26)$$

или соответственно

$$\sigma \approx \omega_{pe} n e v_{Te} / 4\pi j. \quad (11.27)$$

В адиабатическом приближении, т.е. без учета тепловых потерь, (11.18) также можно использовать, упростив его с учетом неравенства $u \gg \omega/k$, что дает в итоге

$$j \cong n e c_s (M/m)^{1/3} (E^2 / 8\pi n T_e)^{1/6} \quad (11.28)$$

(предлагаем этот вывод читателю в качестве упражнения). Формулы (11.26)–(11.28) называют обычно формулами Сагдеева (хотя первые две из них были «переоткрыты» другими теоретиками не

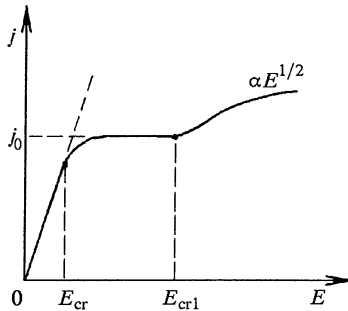


Рис. 11.3. $j_0 \cong n e c_s$, $E_{cr} \approx j_0 / \sigma_c \approx (8\pi n T_e)^{1/2} (m/M)^{1/2} N_D^{-1} \ln N_D$, $E_{cr1} \approx (m/M) (8\pi n T_e)^{1/2}$

один раз). Окончательная зависимость $j(E)$ представлена на рис. 11.3. Что касается спектра шумов W_k , то его теперь можно найти как обычно, приравнявая линейный инкремент нелинейному декременту:

$$\gamma_1^c + \gamma_n^i = 0.$$

Графически этот баланс показан все на том же рис. 11.2. Как и в случае слабого поля, результат оказывается решением довольно нетривиального интегродифференциального уравнения. Простейшее его представление получается после усреднения по углу $\theta = \angle \mathbf{jk}$ (его называют спектром Кадомцева (см. обзор Кадомцева, 1964 г.)):

$$W_k / nT \cong (28\pi)^{-1} \theta_0^{-2} (j / n e v_{Te}) (T_e / T_i) k^{-3} \ln(1 / k r_{De}), \quad (11.29)$$

где θ_0 — характерная угловая ширина спектра. Современная теория объединяет спектры (11.24) и (11.29) в общем решении, проводит корректную классификацию различных режимов аномального сопротивления и дает более или менее замкнутую картину транспортных явлений (Быченков и др., 1988 г.).

Уже в течение десятилетий существуют проблемы, до сих пор не решенные и весьма опасные для этой, казалось бы, почти завершен-

ной, теории. Мы отметим две самых серьезных. Первая — проблема убегания электронов.

Эффект убегающих электронов — свойство плазмы с классической кулоновской проводимостью. Частота кулоновских столкновений, $n\langle v\sigma \rangle_{ei}$, будучи усреднена по функции распределения частиц, оказывается зависящей от температуры как $T^{-3/2}$ — это хорошо известно. Но для существенно надтепловых частиц важна не средняя, а им присущая частота рассеяния $\nu_{ef} \sim v^{-3}$. Чем больше скорость частицы, тем больше она и возрастает на длине свободного пробега. Для данного электрического поля E всегда существует некоторая доля электронов (большая или малая — это зависит от величины E), которые в этом поле ускоряются или как бы «перегреваются», так как ускорение не является свободным. Для некоторого поля, именуемого полем Дрейсера E_D ,

$$E_D \approx r_D^{-2} e \ln N_D \approx (8\pi n T)^{1/2} N_D^{-1} \ln N_D \quad (11.30)$$

все электроны оказываются вовлечены в ускорение.

Такой режим практически никогда не может быть реализован в чистом виде из-за многочисленных неустойчивостей (хотя бы той же ионно-звуковой), но некоторые проявления эффекта убегания хорошо известны экспериментаторам. Для дальнейшего важно заметить, что в случае ионного звука черенковское плазмон-электронное взаимодействие обнаруживает такую же зависимость от v , как и кулоновские столкновения (см. уравнение (4.37)); а значит, и в случае ионно-звуковой турбулентности эффект убегания неотвратим. Это замечено еще Рудаковым и Кораблевым (1966 г.), дальнейшее развитие эта идея получила в работах Векштейна и др. (см. Галеев и Сагдеев, 1973 г.) в рамках автомодельной квазилинейной теории. Было показано, что, невзирая на неустойчивость, аномальное сопротивление и другие коллективные эффекты, асимптотически может реализоваться режим почти свободного ускорения:

$$f^e = F^e(u)/eEt, \quad f^i = F^i(u)/eEt, \quad W_k(t) = m\omega_{pe}^4 t^2 U(q), \quad (11.31)$$

$$u = mv/eEt, \quad q = keEt/m\omega_{pe}.$$

Отношение $W/n\langle \mathcal{E} \rangle \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, чем подтверждается правильность использования в асимптотике квазилинейного приближения. В ряде последующих работ обозначились некоторые противоречия. Во-первых, нелинейные эффекты «оттягивают» реализацию такого режима. Более того, с учетом релятивистских эффектов они могут и вовсе его «закрыть». Во-вторых, даже слабое магнитное поле препятствует ускорению, потому что высокоэнергичные частицы возбуждают в плазме волны с отрицательной энергией (так называемые бернштейновские моды). Впоследствии приводились и другие

аргументы. Но все они, вместе взятые, не могут снять проблему в принципе. Впрочем, стоит, пожалуй, заметить, что до сего дня этот режим ни разу не был идентифицирован в эксперименте.

Нелинейная динамика порождает и собственные проблемы. Второй пример, о котором мы хотели бы упомянуть, связан с перегревом тепловых ионов.

Как уже говорилось, квазилинейная теория связана с обязательным сохранением числа резонансных частиц. Если в качестве таковых рассматривать резонансные ионы, то естественно было бы ожидать их перегрева ввиду экспоненциально малого их числа. Но эксперимент обнаруживает, во-первых, что число резонансных ионов не намного меньше числа тепловых, и, во-вторых, что их средняя энергия не слишком отличается от T_e . Было найдено объяснение (Кингсеп, 1991 г. и цитированная там литература). Дело в том, что коэффициент диффузии в пространстве скоростей при индуцированном рассеянии звука на ионах хотя и мал, $D_{vv} \propto (W/nT)^2$, но весьма эффективно работает из-за специфической зависимости от скорости: $D_{vv} \propto v^2$ (это случай так называемой автомодельности Станюковича). Доказано, что такая зависимость обеспечивает заметный поток ионов в пространстве скоростей через границу резонансной области $v \approx c_s$. Таким образом удается объяснить все наблюдаемые экспериментальные факты, кроме одного: почему тогда вообще не теряется режим аномального сопротивления и турбулентного нагрева плазмы. С точки зрения линейной теории перегруженность резонансной области ионами должна препятствовать поддержанию неустойчивости. Но она есть. И в этой весьма интересной области физики плазмы, наряду с достижениями, немало остается и серьезных вопросов.

Взаимодействие лазерного излучения с плазмой.

Плазменная турбулентность в короне.

Сильная турбулентность

В число самых трудных вопросов, возникающих при написании учебников по физике плазмы, безусловно входит проблема описания крупных термоядерных установок. В 1980-е годы не было ни одного сезона без значительных новостей в области токамаков, лазерного УТС, сильноточных пучков и т. д., да и в текущем десятилетии ситуация почти та же. В то же время любой автор, стремясь как-то отразить в своем труде этот круг вопросов, питает надежду, что книга его проживет дольше, чем один-два года. А это побуждает жертвовать модным материалом в пользу долгоживущих результатов.

Соответственно мы не будем пытаться излагать в целом концепцию инерциального ядерного синтеза, а равно и лидирующего в этой области лазерного направления. Тем более не стоит в книге по нелинейной физике браться за описание современных сложных схем лазерного УТС. Мы остановимся лишь на некоторых важных аспектах этой программы, имеющих к нашей тематике самое непосредственное отношение. По этой причине и взят в качестве примера именно лазерный синтез, а не более продвинутое направление — токамак. Все, о чем мы будем говорить, относится к направлению «direct driving», что примерно можно перевести как «прямое облучение мишени». Это направление абсолютно доминировало в 1970-х и первой половине 1980-х годов и послужило одним из важнейших стимулов перехода физики плазмы на нелинейные задачи.

Идея данного направления состоит в непосредственном взаимодействии мощного лазерного пучка (более 10^{15} В/см²) с веществом мишени, которая оформляется в виде сферической многослойной капсулы. Соответственно и облучение организуется по возможности как можно ближе к сферически-симметричному. При столь значительных потоках энергии на поверхность мишени вещество уже не может существовать в каком-либо ином состоянии, кроме плазменного. Плазменное облако, окружающее ядро мишени, называется

обычно короной. В этой короне и происходит передача в плазму энергии падающего света. (Достаточно легкая мишень может полностью перейти в плазменное состояние; в этом случае короной называют именно область взаимодействия.)

Плазменное облако, постоянно нагреваемое светом лазера, непрерывно расширяется в вакуум и при этом за счет эффектов реактивной природы (вспомним уравнение Мещерского) поджимает ядро мишени. Этот процесс принято называть абляцией. В итоге небольшая часть ($\sim 10\%$) вещества оказывается сжатой и, как следствие, разогретой до такой степени, что происходит термоядерный микровзрыв. Никакого удержания внешним полем здесь не предполагается, «удерживает» плазму инерция вещества — отсюда и термины «инерциальный синтез» или «инерционное удержание». Физика и механика таких мишеней достаточно сложны, в частности топливо D_2 или DT никогда не используется в «голом» виде, но всегда ядро, изготовленное из этих веществ, «одето» несколькими слоями различных веществ, чтобы правильно организовать процесс абляции.

При выборе лазера немаловажен фактор рабочей длины волны. Чем она больше, тем лучше может быть симметрия облучения; в то же время чем она короче, тем глубже залегает область нагрева и тем толще будет горячий плазменный слой. Это нетрудно понять, обратившись к закону дисперсии поперечных волн в плазме

$$\varepsilon = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2 = k^2 c^2/\omega_i^2,$$

откуда следует известное соотношение

$$\omega_i^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c^2. \quad (12.1)$$

При распространении вдоль градиента плотности, т. е. к центру мишени, волна сохраняет частоту (см. уравнения (4.38)–(4.40)), если, конечно, ее динамика линейна, а параметры системы стационарны. Волна не может проникнуть глубже уровня плотности (ее называют критической), в котором локальная плазменная частота совпадает с частотой падающей волны $\omega_{pe} \cong \omega_i$. Далее, если она не поглощается — ей остается только отразиться. Процесс поглощения, однако, здесь как раз должен быть особенно эффективен, что можно увидеть исходя из выражения для групповой скорости

$$\partial\omega/\partial k = kc^2/\omega_i, \quad (12.2)$$

а $k \rightarrow 0$ в окрестности критической плотности

$$n_{cr} = m\omega_i^2/4\pi e^2, \quad (12.3)$$

где $\omega_{pe} \rightarrow \omega_i$. На самом деле квазиклассическое приближение теряет силу при $k \approx 0$, так что сама эта «точка» есть в действительности протяженная область с характерным размером порядка c/ω_{pe} .

На ранней стадии исследований по лазерному УТС обсуждались два типа машин: во-первых, лазер на Nd-стекле, $\lambda \cong 1,06 \text{ мкм} \Rightarrow \Rightarrow n_{cr} \approx 10^{21} \text{ см}^{-3}$; во-вторых, CO_2 -газовый лазер, $\lambda \cong 10,6 \text{ мкм} \Rightarrow \Rightarrow n_{cr} \approx 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Помимо факторов, приведенных выше, газовый лазер привлекателен еще и по технологическим причинам. И все же в конце концов он был отвергнут из-за слишком низкой критической плотности, следствием чего, как мы скоро увидим, оказывается неизбежная генерация надтепловых электронов, разрушающих динамику абляции.

Для достаточно низких интенсивностей света можно указать два классических механизма передачи энергии в мишень: 1) затухание вследствие кулоновских столкновений и 2) линейная трансформация поперечных волн в ленгмюровские (которые потом затухают) на градиенте плотности. Поднимая интенсивность света, мы проходим порог нелинейности и вводим в игру распадные процессы. Более других важны распады, изображенные на рис. 7.4*в* и *г*, вернее сказать, обратные им. Природа порогов нелинейности ясна из уравнения (7.5). Если $N^l, N^s \rightarrow 0$ в начальный момент времени, взаимодействие принимает вид нелинейной (параметрической) неустойчивости, которая может развиваться лишь постольку, поскольку нелинейное возбуждение l- и s-волн превосходит их линейное затухание. Но эта неустойчивость не описывается уравнением (7.5) или другим в этом роде, так как свет лазера — когерентная монохроматическая волна, и здесь не может быть речи о случайных фазах. (Этот вопрос уже затрагивался в гл. 7.) Вместо (7.5) нужно использовать уравнение типа (7.4). Такое параметрическое возбуждение в теории возмущений имеет меньший порядок, нежели индуцированное рассеяние волн на частицах, что меняет вообще всю иерархию нелинейных процессов. В принципе, даже ограничения, которые налагаются на трехволновые процессы законами сохранения (см. (7.2)), могут оказаться неважными: сами законы дисперсии могут существенно модифицироваться в сильном внешнем осциллирующем поле. Иными словами, здесь начинает работать вещественный сдвиг частоты или, иначе говоря, перенормировка закона дисперсии $\omega(\mathbf{k})$, которую мы упомянули в гл. 8, но пренебрегли ею. Итак, здесь доминируют трехволновые процессы. Детальное изложение сценария параметрической неустойчивости и всей физики, с этим связанной, можно найти в книге Силина (1973 г.) и обзоре Литвака (1980 г.).

Казалось бы, интенсивная волна накачки должна стимулировать установление стационарного состояния (динамического равновесия), которое можно получить, приравняв нулю правую часть уравнения (7.5). Или — с поправкой на когерентность — можно ожидать другого, но опять-таки стационарного состояния. В действительности режим нелинейного насыщения параметрической неустойчивости не

совсем стационарен, числа волн (или амплитуды) медленно осциллируют во времени ($\Omega \leq \gamma_n$). Но эта ситуация представляет скорее чисто академический интерес. По крайней мере, плазменную неоднородность следует принять во внимание. Вторичные моды (продукты распада) после рождения покидают область взаимодействия, меняя при этом свои волновые числа. Как следствие возникает расстройка фазового резонанса, затрудняющая обратный процесс. (При достаточной ее величине обратный процесс пойдет уже в режиме случайных фаз.) А еще нужно учитывать течение плазмы, т.е. абляцию. Резюмируя, можно сказать, что параметрическая неустойчивость может служить эффективным механизмом накачки энергии в плазму. (Полезно заметить, что в обоих случаях — см. рис. 7.4*в* и *г* — вторичные волны являются потенциальными, а они не могут выходить из плазмы в вакуум.) Можно указать один из возможных механизмов последующей диссипации. Ленгмюровские волны ограничиваются со стороны больших концентраций условием

$$\omega_1 \cong (1 \text{ или } \frac{1}{2}) \cdot \omega_t > \omega_{pc} \cong n^{1/2}, \quad (12.4)$$

а со стороны меньших — уравнением (4.40), из которого следует $kr_{De} \rightarrow 1$ при $\delta n/n \approx -1/2$. Таким образом, ленгмюровские вторичные моды отражаются от внутренних слоев и гибнут на периферии короны. Ионно-звуковые шумы, рождаясь вблизи критической плотности и распространяясь вглубь мишени, не могут не чувствовать неоднородность температуры. Если $T \rightarrow 0$ (в сравнении с короной), то из сохранения частоты следует

$$\omega = \text{const} \cong kc_s = k(T/M)^{1/2} \Rightarrow k \rightarrow \infty.$$

С другой стороны, в области малых плотностей включается уравнение (4.41), из которого можно видеть, что $k \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow 0$. В действительности ионно-звуковые волны интенсивно затухают при $k \approx r_{Di}^{-1}$. Таким образом, обе моды локализованы в пространстве и обеспечивают поток энергии накачки в плазму. Существуют и другие процессы того же рода, но идущие с участием непотенциальных волн (см. рис. 7.4). Но их вероятности всегда значительно меньше, чем у упомянутых выше. (Это утверждение может быть доказано на уровне теоремы.) Поэтому мы ограничимся обсуждением процессов с участием потенциальных волн. В энергетическом балансе ионный звук в данном случае заметной роли играть не может. Действительно, вместе с ионно-звуковым квантом каждый раз рождается ленгмюровский, так что поток энергии в ионный звук не превышает доли m/M от полного энерговклада. Главный канал стока энергии должен быть связан с ленгмюровской турбулентностью. Если уровень ее не слишком велик (при умеренных энерговкладах), то может работать описанный выше механизм диссипации на неоднородности

плазмы; при больших интенсивностях облучения следует, по-видимому, ожидать подключения собственной нелинейности ленгмюровских волн. В самом деле, пусть a — характерный масштаб неоднородности, $a \approx |n/\nabla n|$. Тогда характерный масштаб времени затухания:

$$\tau \approx a / \left| \partial \omega / \partial k \right|_{\lambda} \approx (a/v_{Te})(kr_{De})^{-2} \approx (a/v_{Te})(mc^2/T_e). \quad (12.5)$$

Видно, что темп затухания ограничен сверху, т. е. этот канал эффективен лишь при малых потоках энергии. В обратном случае нелинейные взаимодействия в газе ленгмюровских плазмонов должны привести к установлению некоторого квазистационарного состояния. При этом, как было установлено в гл. 9, происходит перекачка плазмонов (и, тем самым, энергии) в длинноволновую область (см. рис. 9.3). Все нелинейные процессы сохраняют число ленгмюровских волн. Для трехволновых процессов это обусловлено неравенством $|\omega_1 - \omega_{pe}| \ll \omega_{pe}$, запрещающим распад плазмона на два. Примерно то же происходит и с четырехплазмонным взаимодействием: разрешено плазмон-плазмонное рассеяние, но не распад одного плазмона в три. В целом это означает, что хотя ленгмюровские волны и «краснеют» при нелинейной перекачке, главная часть их энергии, соответствующая ω_{pe} , остается «замороженной». В отличие от ионно-звуковой турбулентности, где накопление акустических плазмонов в спектре Кадомцева не означало энергетической катастрофы, здесь такая опасность есть. Эту проблему иногда называют проблемой конденсата плазмонов.

Обратимся к уравнению (6.12). Глядя на него вместе с рис. 9.3б, можно предположить, что в данном режиме слабая турбулентность долго не проживет. Поток в \mathbf{k} -пространстве понижает характерное значение волнового числа и в то же время ведет к накоплению осцилляторной энергии в длинноволновой области. Заранее мы можем ожидать какого-то процесса, приводящего к перенормировке величины k вплоть до равенства $(k_{ef}r_{De})^2 \approx W/nT$ или еще более драматического сценария, обращающего ситуацию рис. 9.3б в ту, что изображена на рис. 9.3а. Она интересна тем, что гармонически сопрягает поток плазмонов в \mathbf{k} -пространстве в сторону больших k и поток электронов в \mathbf{v} -пространстве в сторону больших v , обусловленный квазилинейной диффузией. В последующих главах мы познакомимся с конкретным сценарием такого рода и увидим, каков реально механизм перегрева. Надтепловые «хвосты» электронов представляют собой большую опасность для всей концепции лазерного УТС; как уже говорилось, они явились причиной отказа от программ, базирующихся на газовых лазерах. Причина — в преднагреве ядра мишени, которая после этого не может при абляции быть сжата до необходимых параметров (вообще, неконтролируемое вмешательство в тонкую газодинамику абляции всегда очень опасно).

В любом случае теория слабой турбулентности не может работать в режиме накопления ленгмюровских плазмонов. «Механизм отказа» слабой турбулентности был впервые исследован Веденовым и Рудаковым (Веденов и др., 1967 г.). Теперь его называют модуляционной неустойчивостью. Она развивается при превышении порога

$$W/nT \rightarrow \langle k \rangle^2 r_{De}^2, \quad (12.6)$$

или, более точно,

$$W/nT \rightarrow (\Delta k r_{De})^2, \quad (12.7)$$

$$\Delta k \equiv \langle k - \langle k \rangle \rangle,$$

и реализуется в «кипящем» конденсате плазмонов, преобразуя его в коррелированные «сгустки». Последующая их эволюция уже никак не может рассматриваться в рамках приближения слабой турбулентности, и, более того, сама модуляционная неустойчивость — уже не совсем слаботурбулентный процесс. По этой причине мы воздержимся от подробного рассмотрения формализма Веденова и Рудакова, но обратимся сразу к существенно нелинейной теории Захарова. Это и будет темой следующей главы.

Модель Захарова. Ленгмюровские солитоны. Солитонная турбулентность

Эта глава в большей степени, чем любая из предшествующих, может рассматриваться как прямое введение в современную нелинейную физику плазмы. Поэтому и знакомство с ней потребует от читателя большего напряжения. Автор, со своей стороны, старался по возможности приблизить материал к уровню студента. Для более детального знакомства с предметом можно рекомендовать цитированный обзор (Кингсп, 1983 г.), но лишь после изучения настоящей главы.

13.1. Основные уравнения

Как мы уже упоминали в гл. 12, приближение слабой турбулентности становится неадекватным, если уровень ленгмюровских шумов достигает предела (12.6) или хотя бы (12.7). С точки зрения физики турбулентной плазмы не так интересна сама модуляционная неустойчивость, как ее конечный результат — развитая сильная ленгмюровская турбулентность. По причинам, которые обсуждались выше, именно это состояние оказалось предметом особого интереса фундаментальной физики плазмы в течение 70-х годов. Многие эффекты, которые как-то поняты нелинейной физикой плазмы к настоящему времени, впервые были поняты именно на примере сильной ленгмюровской турбулентности.

Итак, посмотрим, что же происходит, когда отказывает слабо-турбулентная модель. Прежде всего отметим еще раз, что при этом степень турбулентности W/nT остается малой величиной, так что этот «отказ» не означает драматических изменений в динамике плазмы как целого. И отнюдь не выглядит невероятным предположение, что и в этом новом режиме мы сможем продолжить рассмотрение на языке квазичастиц, но квазичастицы должны быть какими-то иными. Плоские волны как фундаментальный объект уже не годятся. Разумеется, формально фурье-представление любого поля всегда возможно. Но в общем случае мы должны будем следить не

только за амплитудами, но и за фазами волн, и описание турбулентности на языке только интенсивностей — а значит, свободных квазичастиц — не всегда возможно. Чтобы уйти от проблемы нарушения основного условия квазичастичного рассмотрения — сохранения числа квазичастиц в начальном и конечном состояниях (см. гл. 6), попытаемся построить квазичастицы нового типа. Для дальнейшего полезно знать следующее свойство модуляционной неустойчивости, известное еще из работы Веденова и Рудакова: результатом ее оказывается локализация поля осцилляций; иными словами, первоначально хаотическая картина трансформируется в нелинейные структуры. По-видимому, это вообще одно из главных свойств любой сильной турбулентности. Поэтому представляется разумным стартовать в этом случае с нелинейного уравнения в \mathbf{r} -пространстве, не прибегая к фурье-разложению. Начнем с базового линейного уравнения, описывающего ленгмюровские волны.

Как мы уже знаем, система уравнений будет следующей:

$$\partial \mathbf{v}_e / \partial t = - (e/m) \mathbf{E} - 3v_{Te}^2 (\nabla n_e / n_0), \quad (13.1)$$

$$\partial n_e / \partial t + n_0 \operatorname{div} \mathbf{v}_e = 0, \quad (13.2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi n_e e. \quad (13.3)$$

Цепочка преобразований, которая демонстрируется ниже, приводит в результате к следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} (\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2) &= -4\pi e \partial^2 n_e / \partial t^2 = 4\pi n_0 e \operatorname{div} (\partial \mathbf{v}_e / \partial t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{div} (\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2 + \omega_{pe}^2 \mathbf{E} - 3v_{Te}^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{E}) = 0. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Это уже точное линейное уравнение, более содержательное, чем фурье-образ. По некоторым причинам, которые станут ясными из дальнейшего, мы не сняли внешний оператор div . Чтобы перейти к нелинейному приближению, примем во внимание, что период ленгмюровских колебаний — самый короткий масштаб времени для ленгмюровской турбулентности. Соответственно сделаем подстановку, очень похожую на ту, что делается при выводе квазилинейных уравнений:

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega_{pe}t) + \text{c.c.}]. \quad (13.5)$$

С учетом вещественности амплитуды поля

$$\partial / \partial t \rightarrow -i\omega_{pe} + \partial / \partial t, \quad \partial / \partial t \ll \omega_{pe}, \quad (13.6)$$

$$\partial^2 / \partial t^2 \rightarrow -\omega_{pe}^2 - 2i\omega_{pe} \partial / \partial t. \quad (13.7)$$

Самый малый член $\partial^2 / \partial t^2$ в правой части (13.7) отброшен. Получаем вместо (13.4):

$$\operatorname{div} (2i\omega_{pe} \partial \mathbf{E} / \partial t + 3v_{Te}^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{E}) = 0. \quad (13.8)$$

Линейное решение (13.8) очевидно:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \exp [i(\mathbf{kr} - \delta\omega t)], \quad (13.9)$$

$$\delta\omega = \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \omega_{pe}.$$

Следует обсудить доминирующий тип нелинейности. Не имеет смысла добавлять в уравнения (13.1)–(13.3) нелинейные члены вида $(\nabla\mathbf{v})\mathbf{v}$ и/или $\nabla n/n$, потому что привести они могут лишь к эффектам порядка $W/mn(\omega/k)^2 \ll W/nT$, тогда как модуляционная неустойчивость вступает в игру при $W/nT \approx (kr_{De})^2 \approx \delta\omega_l/\omega_{pe}$. Иначе говоря, эти нелинейные поправки заведомо много меньше дисперсионной. Так что более обещающим представляется учет электрон-ионной нелинейности, типичной для процессов типа $(1 \rightarrow 1 + s)$ или $(1 + 1 \rightarrow 1 + 1)$. Чисто ионная нелинейность также представляется существенной для высокочастотных ленгмюровских волн. Естественная нелинейная связь электронного и ионного движений — через возмущение плотности:

$$\omega_{pe}^2 \mathbf{E} \rightarrow \omega_{pe}^2 \mathbf{E} + \omega_{pe}^2 (\delta n/n_0) \mathbf{E}, \quad (13.10)$$

и, таким образом, уравнение для высокочастотных пульсаций приобретает окончательную нелинейную форму:

$$\operatorname{div} (2i \partial \mathbf{E} / \partial t + 3\omega_{pe} r_{De}^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{E} - \omega_{pe} (\delta n/n) \mathbf{E}) = 0. \quad (13.11)$$

Теперь понятно, почему нужно было оставить оператор div . Два первых члена в левой части (13.11) — потенциальные векторы, но не третий. Сняв дивергенцию, мы должны были бы приплюсовать какой-то ротор некоторого вектора, чтобы соблюсти должную ковариантную структуру уравнения. Только одномерный случай, по причине вырожденности, может быть исключением — правда, очень важным. (В этом случае снятие производной по x дает просто константу, каковая легко устраняется при учете граничных условий.) Если теперь обратиться к низкочастотному (ионному) возмущению, то в линейном приближении это будет просто звуковая волна, которая в \mathbf{r}, t -представлении выглядит известным образом:

$$\delta n = \delta n(\mathbf{r} - \mathbf{c}_s t)$$

(в бесстолкновительной плазме это может быть только ионный звук). Описывающее эту волну уравнение будет также совершенно классическим:

$$(\partial^2 / \partial t^2 - c_s^2 \nabla^2) \delta n = 0, \quad (13.12)$$

где $c_s = (T_e/M)^{1/2}$ в простейшем предельном случае сильно неизо-термической плазмы, $T_e \gg T_i$. Отличие ионно-звуковой дисперсии

от акустической в данном случае несущественно — ведь электронные и ионные движения, а значит, и характерные масштабы, согласованы, но электронные возмущения не могут существовать при $kr_{De} > 1$, когда только и заметно такое отличие. Чтобы вычисления были как можно проще (а они и так местами будут достаточно громоздки), мы далее предполагаем все эти условия выполненными. Следующий вопрос: какими нелинейными членами нужно дополнить уравнение (13.12), чтобы получить замкнутую систему уравнений? Очень удобно для ответа на этот вопрос представление о ВЧ-давлении. (Соответствующую ему силу называют силой Миллера.) Рассмотрим два первых порядка теории возмущений для высокочастотного, чисто электронного уравнения Эйлера, пренебрегая для простоты как электронным давлением, так и столкновениями:

$$\partial \mathbf{v}_1 / \partial t = - (e/m) \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{v}_1 = -i(e/m\omega) \mathbf{E},$$

$$\partial \mathbf{v}_2 / \partial t = - (\mathbf{v}_1 \nabla) \mathbf{v}_1 = -\frac{1}{2} (e/m\omega)^2 (\nabla E^2 + [\text{rot } \mathbf{E}, \mathbf{E}]).$$

Не будем забывать, что мы имеем дело с ленгмюровскими волнами. Это означает: 1) $\text{rot } \mathbf{E} \equiv 0$ и 2) $\omega \cong \omega_{pe}$; по крайней мере, можно пренебречь сдвигом частоты при вычислении нелинейных членов. Нам, однако, нужны не все члены такого рода, но лишь медленно меняющиеся во времени, которыми мы могли бы дополнить уравнение (13.12). Такое усредненное по времени медленное движение и может быть представлено как эффект ВЧ-давления:

$$\partial \langle \mathbf{v} \rangle / \partial t = -\frac{1}{2} (e/m\omega)^2 \nabla \langle E^2 \rangle \equiv -\nabla P_{HF} / n_0 m, \quad (13.14)$$

$$P_{HF} = (\omega_{pe}/\omega)^2 \langle E^2 \rangle / 8\pi \cong E^2 / 16\pi,$$

где E^2 есть просто квадрат амплитуды. Уравнение (13.14), однако, является все еще чисто электронным уравнением, в то время как (13.12) описывает движение ионов. Представим себе возмущение достаточно медленное, чтобы оба распределения — электронное и ионное — можно было бы описать больцмановскими распределениями:

$$n_e = n_0 \exp(e\Phi/T - P_{HF}/n_0 T) = n_i = n_0 \exp(-e\Phi/T). \quad (13.15)$$

Используя (13.15), можно исключить усредненный потенциал разделения зарядов Φ :

$$e\Phi = P_{HF} / 2n_0 \Rightarrow \delta n_i = n_0 [\exp(-P_{HF}/2n_0 T) - 1] \cong \cong -n_0 |E|^2 / 16\pi n_0 T. \quad (13.16)$$

Этот результат непосредственно будет использован для рассмотрения существенно дозвуковых ионных движений; с другой стороны,

уравнение Больцмана можно трактовать как квазистатический предел уравнения Эйлера и сразу имплантировать его в правую часть уравнения (13.12). Получается, что ВЧ-давление выталкивает из некоторой области электроны, они же — через поле разделения зарядов — тянут за собой и ионы. Поэтому мы можем как бы перенести ВЧ-давление на плазму как целое и модифицировать звуковое уравнение:

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial t^2} - \frac{\gamma P}{\rho} \nabla^2 \delta n = 0, \quad (13.17)$$

$$\gamma \cong 1, \quad P = nT + P_{\text{HF}}, \quad \rho = nM.$$

Как уже было отмечено, чисто ионные нелинейности в данном случае отношения к делу не имеют. В результате получается система уравнений, которые называются уравнениями Захарова (Захаров, 1972 г.):

$$\text{div} \left(2i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 3\omega_{\text{pe}} r_{\text{De}}^2 \nabla \text{div} \mathbf{E} \right) = \omega_{\text{pe}} \text{div} \left(\mathbf{E} \frac{\delta n}{n} \right), \quad (13.18)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \nabla^2 \right) \delta n = \frac{\nabla^2 |E|^2}{16\pi M}.$$

Строго говоря, низкочастотное уравнение описывает не только «квазистатические» возмущения, но и акустические, и даже сверхзвуковые. При этом механизм эволюции плотности заметно отличен от того, который рассматривался при выводе уравнения (13.16) (см. ниже). Но уравнения (13.18) все равно остаются правильными. В этой главе будут рассмотрены только одномерные решения уравнений (13.18) и соответственно лишь одномерная турбулентная динамика, так что полезно переписать уравнения Захарова еще раз — уже в одномерном виде:

$$2i \frac{\partial E}{\partial t} + 3\omega_{\text{pe}} r_{\text{De}}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \omega_{\text{pe}} \frac{\delta n}{n} E = 0, \quad (13.19)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \delta n = \frac{1}{16\pi M} \frac{\partial^2 |E|^2}{\partial x^2}.$$

Для медленной (квазистатической) ионной динамики, которая обсуждалась выше, есть смысл пренебречь временными производными в звуковом уравнении или, что то же, непосредственно воспользоваться уравнением (13.16). В этом пределе система (13.19) трансформируется в единственное классическое нелинейное уравнение, которое называют нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ):

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{3}{2} \omega_{\text{pe}} r_{\text{De}}^2 \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\omega_{\text{pe}} |E|^2 E}{32\pi n M} = 0. \quad (13.20)$$

Это уравнение довольно хорошо изучено. Известно, что оно имеет бесконечный набор интегралов движения. В частности, отсюда следует, что настоящей турбулентности оно описать не может. Дело в

том, что бесконечный набор интегралов движения приводит, как можно показать, к полной интегрируемости данного уравнения, и для описания турбулентной динамики ему как бы «недостает случайности» (Захаров и др., 1980 г.). Не стоит, однако, забывать, что (13.20) — всего лишь предельный случай более сложных уравнений, и для полной системы такой теоремы нет.

Уравнения (13.18) могут правильно описывать как модуляционную неустойчивость, так и существенно нелинейную динамику. Последний случай представляется наиболее интересным. Поскольку модуляционная неустойчивость обусловлена достаточно высоким уровнем турбулентности, $W \geq (kr_{De})^2 nT$, естественно ожидать, что в результате ее окажется, по крайней мере, $W/nT \approx (k_0 r_{De})^2$, где k_0 — эффективное волновое число, согласованное с характерным масштабом локализации, $L \approx k_0^{-1}$. Если $W \rightarrow nT$ вследствие накачки (лазером, пучком частиц или каким-то иным способом), естественным образом включится процесс диссипации, например затухание Ландау, в силу того, что $k_0 r_{De} \rightarrow 1$, или пересечение траекторий электронов, вытекающее из соотношения $v_{\sim} \rightarrow v_{Te}$ и обеспечивающее прямую диссипацию осцилляторной энергии за время порядка ω_{pe}^{-1} . Интересно, что при таком сценарии поток энергии в \mathbf{k} -пространстве меняет направление по сравнению с режимом слабой турбулентности — и это уже напоминает по сути схему Колмогорова. Если в плазме существуют немаксвелловские надтепловые электроны в заметном количестве (их называют «электронные хвосты»), диссипация может происходить и при $W/nT \ll 1$ (см. ниже). Подчеркнем, что такой переход (слабая турбулентность) \Rightarrow (сильная турбулентность), в частности, означает переход от квазиоднородной турбулентности к существенно пространственно неоднородной. Поэтому и величина W во всех наших оценках становится как бы двузначной: иногда она должна означать среднюю по пространству плотность энергии, а иногда — среднюю по области локализации, и эти величины могут быть весьма различны. В принципе, средняя по всему пространству может оказаться и ниже порога модуляционной неустойчивости — но не она, вообще говоря, определяет, со слабой или сильной турбулентностью мы имеем дело. Здесь мы опять сталкиваемся с типичной для нелинейной физики неединственностью. И получается, что едва ли не главным критерием классификации режима остается направление потока энергии.

13.2. Ленгмюровский солитон

Фундаментальный объект теории сильной ленгмюровской турбулентности, «новая квазичастица» — ленгмюровский солитон (Рудаков,

1972 г.). Он может быть получен аналитически из уравнений (13.19). Будем искать решение в форме бегущей волны:

$$E = E(x - v_s t) \exp [i(kx - \delta\omega t)], \quad (13.21)$$

$$\delta\omega \equiv \omega - \omega_{pe}, \quad E \rightarrow 0. \\ x \rightarrow \pm\infty$$

Здесь v_s — скорость этой волны (не путать с c_s), сдвиг частоты $\delta\omega$ включает как нелинейные, так и дисперсионные эффекты. Что касается пространственной модуляции (k), то, как мы сейчас увидим, она неизбежна, если $v_s \neq 0$.

Удобно начать с подстановки (13.21) в уравнение (13.20). При этом связь между НУШ и уравнениями Захарова окажется очень простой. Подстановка расщепляет уравнение (13.20) на два, которые суть его вещественная и мнимая части:

$$\frac{3}{2} \omega_{pe} r_{De}^2 E''_{\xi\xi} + \\ + (\delta\omega - \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \omega_{pe}) E + \omega_{pe} |E|^2 E / (32\pi n M) = 0, \quad (13.22)$$

$$-v_s E'_\xi + 3kr_{De}^2 \omega_{pe} E'_\xi = 0, \quad (13.23)$$

где $\xi = x - v_s t$. Из (13.23) немедленно следует

$$v_s = \partial\omega / \partial k = v_g^1, \quad (13.24)$$

и как раз это соотношение и есть аргумент в пользу пространственной модуляции. Действительно, скорость нелинейной волны оказывается равной групповой скорости ленгмюровских волн, поэтому, если $v_s \neq 0$, то и $k \neq 0$. Обратим особое внимание на то, что мы по умолчанию уже ищем решение, локализованное в k -пространстве, иначе нам следовало бы взять ВЧ-давление в несколько отличной форме: $P_{HF} \propto (|E|^2 - E_{min}^2)$, в чем, однако, нет необходимости, если $E \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Разность в скобках левой части уравнения (13.22) — нелинейный сдвиг частоты, а полная поправка к дисперсии может быть записана в виде

$$\delta\omega = \frac{3}{2} r_{De}^2 (k^2 - k_0^2) \omega_{pe}, \quad (13.25)$$

где k_0 еще предстоит определить из уравнения (13.22). Решить его нетрудно, если воспользоваться известным соотношением:

$$E''_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \frac{d(E'_\xi)^2}{d\xi};$$

поэтому если все остальные члены — функции только E , как это и имеет место в уравнении (13.22), сразу же может быть получен его первый интеграл:

$$E = E_0 \cosh^{-1} k_0 \xi, \quad k_0 = (24)^{-1/2} e E_0 / T. \quad (13.26)$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что (13.26) — действительно точное решение уравнения (13.22). Это решение — всего лишь частное для уравнения (13.20). Вспомним, однако, о модуляционной неустойчивости. Опуская доказательство, по сложности далеко выходящее за рамки настоящей книги (см. Захаров и др., 1980 г.), декларируем следующий результат: ни одно из решений уравнения (13.20) не является устойчивым по отношению к модуляционной неустойчивости, но лишь ленгмюровский солитон. И это первый повод к тому, чтобы назвать его фундаментальным объектом ленгмюровской турбулентности, а второй заключается в том, что и в трехмерной ленгмюровской динамике, хотя она сильно отличается от одномерной, он играет важную роль.

И еще одна причина для столь высокой оценки: ленгмюровский солитон позволяет нам сохранить принцип суперпозиции полей, без которого, по сути, нет настоящей турбулентности, но, вообще говоря, этот принцип в нелинейной физике не работает (достаточно вспомнить ферромагнетики). Волна, не локализованная в пространстве, если уж она нелинейна, не допускает свободного сложения или вычитания другой волны. Поэтому она неустойчиво когерентна и не может участвовать в настоящей турбулентной динамике. Иное дело, если поле этой волны исчезает по экспоненциальному закону в зависимости от пространственной координаты (см. (13.26)). И к тому же, чем больше амплитуда, тем меньше пространственная ширина k_0^{-1} (см. еще раз (13.26)).

Итак, мы получаем возможность конструировать ленгмюровскую турбулентность из таких «квазичастиц», поскольку можем размещать их в пространстве хаотически и со случайными фазами, внося при этом лишь экспоненциально слабое искажение поля. Только в случае заметного перекрытия солитонов возникают вопросы, на которые нам еще надо будет ответить.

Оказывается совсем нетрудно обобщить эти результаты и на базовую систему уравнений (13.19). Для бегущего солитона при этом почти не потребуются никакой модификации. Можно получить общее решение, в котором он будет как бы релятивистским, с эффективным «релятивистским фактором» $(1 - v_s^2/c_s^2)^{-1/2}$, что сразу следует из второго уравнения (13.19):

$$\begin{aligned} E &= E_0 \cosh^{-1} k_0 \xi, \quad \xi = x - v_s t, \\ v_s &= \partial \delta \omega(k) / \partial k, \quad \delta \omega = \frac{3}{2} r_{\text{De}}^2 (k^2 - k_0^2) \omega_{\text{pe}}, \\ k_0 &= (24)^{-1/2} (1 - v_s^2/c_s^2)^{-1/2} e E_0 / T. \end{aligned} \quad (13.27)$$

Особого внимания заслуживают следующие замечательные свойства ленгмюровского солитона:

1. Это решение полностью определено двумя свободными параметрами, например амплитудой E_0 и скоростью v_s (или, скажем, k_0 и k). При этом величина E_0 обязана быть много меньше, чем $(16\pi nT)^{1/2}$, или, что то же, $k_0 r_{De} \ll 1$. Ограничение на скорость солитона v_s должно быть более точным: $v_s < c_s$. Не может существовать ленгмюровских солитонов, распространяющихся со сверхзвуковыми скоростями.

2. Уравнения (13.27) никак не меняются в зависимости от того, что больше — k_0 или k . Решение к этому обстоятельству принципиально нечувствительно. Если $k_0 \gg k$, мы имеем дело с пространственно узким солитоном, пространственная модуляция которого ($\sim \exp ikx$) практически несущественна. Она иногда может обнаружиться, если нуль модуляции проходит через плоскость симметрии солитона. В обратном пределе $k_0 \ll k$ солитон становится квазиклассическим (хотя нелинейное решение (13.27) само по себе является не квазиклассическим, а точным). Этот предел по сути близок соотношению (12.7), т.е. это случай слегка модулированного нелинейностью квазиклассического волнового пакета. Нам, конечно, более интересен случай сильной модуляции.

3. Квазистатический ($v_s \rightarrow 0$) и быстрый ($v_s \rightarrow c_s$) солитоны описываются одной и той же системой уравнений (13.19). Но на самом деле существуют два несколько отличных типа ленгмюровских солитонов (впервые это было замечено Яньковым). Разница между ними состоит в различном характере ионных возмущений. Подставляя (13.27) в уравнение (13.14) для P_{HF} , а затем воспользовавшись (13.16) для $\Phi(\xi)$, получаем квазистатический предел:

$$\Phi(\xi) = (E_0^2/8\pi ne)(T_i/T_e) \cosh^{-2} k_0 \xi. \quad (13.28)$$

Но оказывается, что яма плотности может быть образована и по-другому. Пусть потенциал разделения зарядов имеет другой знак: $\Phi(\xi) < 0$. Если ионное распределение установилось во всем пространстве, ионы, проходящие потенциальную яму, должны иметь большую скорость стационарного течения, нежели вдали от нее, и, как следствие, опять возникает минимум плотности:

$$\delta n/n = \int dv f^i(v) [v/(v^2 - 2e\Phi/M)^{1/2} - 1]. \quad (13.29)$$

Этот вид солитона — единственно возможный, если $v_s > v_{Ti}$. Если же $v_s < v_{Ti}$, могут существовать оба вида. Разложение соотношения (13.29) по малому параметру $(-e\Phi/T_i)^{1/2}$ дает в этом сугубо дозвуковом пределе:

$$\Phi(\xi) = -\pi(T_i/T_e)[E^2(\xi)/32\pi ne][E^2(\xi)/16\pi nT]. \quad (13.30)$$

Таким образом, можно видеть, что не только знак правой части у (13.28), (13.30) различен, но и сам малый параметр. Амплитуда потенциальной ямы (13.30) много меньше, чем у потенциального горба (13.28). Пространственный образ ленгмюровского солитона показан на рис. 13.1. Для второго типа ленгмюровских солитонов

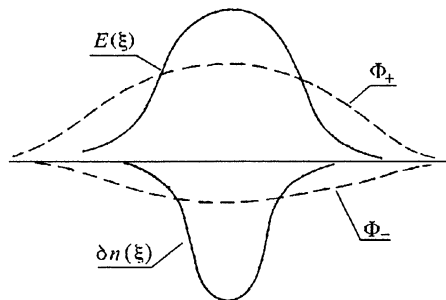


Рис. 13.1. Архитектура ленгмюровского солитона

(т. е. потенциальной ямы Φ_-) может существовать некоторый аналог волн БГК, упомянутых в гл. 3.

Как уже было сказано, бесконечное число интегралов движения — неотъемлемое свойство НУШ. Полезно вывести аналитически хотя бы простейшие (и важнейшие) из этих интегралов. Умножим уравнение (13.20) на E^* и проинтегрируем:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \int |E|^2 dx + \frac{3}{2} \omega_{pe} r_{De}^2 \int E^* \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} dx + \frac{\omega_{pe}}{32\pi n M} \int |E|^4 dx = 0. \quad (13.31)$$

Возьмем комплексно сопряженное от уравнения (13.31) и затем вычтем его из уравнения (13.31); в результате получаем

$$2i \frac{\partial}{\partial t} \int |E|^2 dx + \frac{3}{2} \omega_{pe} r_{De}^2 \int (E^* E''_{xx} - E E''_{xx}) dx = 0.$$

И наконец, интегрируя второй член по частям, приходим к интегралу движения:

$$I_0 = \int |E|^2 dx. \quad (13.32)$$

На первый взгляд он выглядит, как интеграл энергии поля. Но не будем забывать, что интегральная энергия ленгмюровской волны может быть получена только при учете электронного тепла. Чисто полевой интеграл энергии напоминает скорее число квантов N или, точнее, «энергию покоя» $N\omega_{pe}$. Итак, I_0 должен быть поставлен в соответствие полному числу плазмонов.

В связи с интегралом движения (13.32) необходимо сделать два очень важных замечания:

1. Точно такой же интеграл движения присущ полной нередуцированной системе уравнений Захарова — безотносительно к размерности задачи. Таким образом, закон сохранения

$$I_0 \equiv \int |E|^2 dr = \text{const} \quad (13.33)$$

может быть нарушен только в случае существенной роли диссипации: линейного или нелинейного затухания Ландау, кулоновских столкновений, индуцированного излучения поперечных волн и т.д.

2. Уравнение (13.33) представляет собой точный интеграл системы уравнений Захарова, но сами эти уравнения являются результатом приближения, связанного с пренебрежением высшими производными по времени. Это приближение определяется подстановками (13.6), (13.7). Таким образом, I_0 в действительности представляет собой адиабатический инвариант с точки зрения полного описания. Условие его сохранения есть $\partial/\partial t \ll \omega_{pe}$. Сказанное остается справедливым и в случае слабой турбулентности (как и сами уравнения Захарова). Впоследствии мы не раз вернемся к этому вопросу.

Бесконечное число интегралов движения означает для динамической системы полную интегрируемость, т.е. ее динамика будет нелинейной, но не турбулентной. Полная система уравнений Захарова этим свойством не обладает, что для физика делает ее более привлекательной (хотя бы потому, что ни один настоящий физик в полную детерминированность динамики плазмы не поверит). Для количественного анализа сложных систем уравнений обычно стараются работать в безразмерных переменных. В частности, уравнения Захарова обезразмериваются следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \frac{3}{2} \omega_{pe} r_{De}^2 c_s^{-1} \mathbf{r}, & t &\rightarrow \frac{3}{2} \omega_{pe}^2 r_{De}^2 c_s^{-2} \tau, \\ \delta n/n_0 &\rightarrow \frac{2}{3} (m/M)^{1/2} n, & |E|^2 &\rightarrow (32\pi/3) n M c_s^2 (c_s/v_{Te})^2 |\nabla\Phi|^2. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Соответственно (13.18) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} \text{div} \left(-2i \nabla\Phi/\partial\tau - \frac{3}{2} \nabla\nabla^2\Phi - n\nabla\Phi \right) &= 0, \\ (\partial^2/\partial\tau^2 - \nabla^2)n &= \nabla^2 |\nabla\Phi|^2. \end{aligned} \quad (13.35)$$

Для уравнений (13.35), вместо бесконечного набора интегралов, существуют всего три. Это интеграл числа квантов (13.32) или (13.33) и еще два интеграла, обеспечивающие сохранение импульса (I_1) и энергии (I_2). Для простоты приведем их в одномерном случае и безразмерной форме:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int [i(E^* E'_x - E E'_x) + nv] dx, \\ I_2 &= \int [n|E|^2 + |E'_x|^2 + (n/2)^2 + v^2/2] dx, \end{aligned} \quad (13.36)$$

где $\partial v/\partial x = -\partial n/\partial t$. Сопроводим это представление еще более наглядным примером — приведем те же интегралы движения в размерных физических переменных, но для отдельного ленгмюровского солитона:

$$I_0 \omega_{pe} \equiv \mathcal{E}_0 = (6^{1/2}/2\pi) E_0 T/e, \quad (13.37)$$

$$I_1 = I_0 k, \quad (13.38)$$

$$I_2 - I_0 \omega_{pe} = \mathcal{E}_0 k^2 r_{De}^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{7}{64} (M/m) (E_0^2/nT) \right] - \delta \mathcal{E}(E_0), \quad (13.39)$$

где $\delta \mathcal{E}(E_0)$ не зависит от k . Внимание! Все физические величины в таких решениях нормируются на единицу площади поперечного сечения одномерной волны.

Рассмотрим фурье-спектр ленгмюровского солитона. Фурье-преобразование функции (13.26) дается следующей формулой:

$$\begin{aligned} E(x, t) &= \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dk' E_0 \left[2k_0 \cosh \left(\frac{\pi k'}{2k_0} \right) \right]^{-1} \times \\ &\quad \times \exp [i(k' + k)x - i(\omega + k'v_s)t] \equiv \\ &\quad \equiv \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} dq E_q \exp [i(qx - \Omega_q t)], \end{aligned} \quad (13.40)$$

где

$$\begin{aligned} E_q &= 6^{1/2} (1 - v^2/c_s^2)^{1/2} T/e \cosh^{-1} [\pi(q - k)/2k_0], \\ \Omega_q &= \omega_{pe} + \delta\omega + (q - k)v_s. \end{aligned} \quad (13.41)$$

Спектры, соответствующие как стоячему, так и бегущему солитону, изображены на рис. 13.2. Можно отметить, по крайней мере, три их интересных свойства, прямо следующих из формул (13.40), (13.41):

1. Основная функция, описывающая солитон, т.е. $\cosh^{-1} k_0 \xi$, при фурье-преобразовании переходит сама в себя. Таким образом, ленгмюровский солитон выглядит одинаково в g - и k -представлениях.

2. Амплитуда спектрального распределения в k -пространстве не зависит от E_0 . Это связано с основным свойством солитонного решения $k_0 \propto E_0$. Функцией амплитуд будет только ширина спектра.

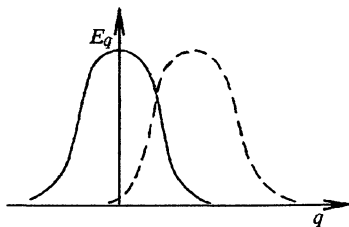


Рис. 13.2. Фурье-спектр ленгмюровского солитона: сплошная кривая — стоячего, штриховая — бегущего

3. $(\Omega_q - \Omega_{q'})/(q - q') \equiv v_s$. Это проявление природы фундаментальных процессов в данной задаче, а именно

$$1 \rightarrow 1 + s, \quad 1 + 1 \rightarrow 1 + 1.$$

Таким образом, низкочастотная огибающая ленгмюровского солитона (δn на рис. 13.1) есть общее биение всех его ВЧ-гармоник.

13.3. Взаимодействие солитонов с частицами

В данном разделе будут рассмотрены два наиболее важных процесса взаимодействия солитонов с частицами плазмы. Это, во-первых, затухание Ландау и, во-вторых, индуцированное (1-1)-рассеяние. Возьмем уравнение (2.30) для описания затухания Ландау и соотношение (13.37) — чтобы связать основную часть энергии солитона с его амплитудой. Вместе они могут быть объединены в таком уравнении:

$$dE_0/dt = (\pi^3)^{1/2}/2^{3/2} \omega_{pe}^2 (T/e) \int_0^\infty dk' \cosh^{-2} (\pi k'/2k_0) \times \\ \times \int_0^\infty dv v (\partial f/\partial v) [\delta(\omega_{pe} - k'v - kv) + \delta(\omega_{pe} + k'v - kv)]. \quad (13.42)$$

Из (13.42) следует простое условие того, чтобы взаимодействие солитонов с электронами было эффективным:

$$v^2 > v_{Te}^2 (16\pi n T_e / E_0^2) \approx \omega_{pe}^2 / k_0^2. \quad (13.43)$$

Физический смысл уравнения (13.43) оказывается достаточно очевиден. Дело в том, что k_0 — по порядку величины граница солитона в k -пространстве (см. (13.40), (13.41)). Для $q > k_0$ амплитуда фурье-гармоник экспоненциально мала, и это вполне соответствует малости в случае резонансных частиц со скоростями, меньшими, чем те, что определены условием (13.43). Чтобы взаимодействие было эффективным, нужно удовлетворить черенковское условие $\omega = kv$, что возможно лишь при $v > \omega/k_{\max}$. Именно в случае ленгмюровского солитона это условие допускает особенно наглядную интерпретацию. В самом деле, поле солитона очень хорошо локализовано в пространстве (с экспоненциальной точностью), и это дает основание рассматривать или моделировать солитон как плоский конденсатор. Расстояние между пластинами оценим как k_0^{-1} , амплитуду и частоту осциллирующего поля конденсатора — соответственно как E_0 и ω_{pe} . С этой точки зрения условие (13.43) есть условие фазового синхронизма для электрона, пролетающего через конден-

сатор, с этим осциллирующим полем. За один пролет электрон набирает энергию, которая, как оказывается, не зависит от амплитуды солитона:

$$mv\Delta v \cong e \int_{-\infty}^{+\infty} E dx = \pi b^{1/2} T_e. \quad (13.44)$$

Уравнение (13.44) нуждается в некотором комментарии. Дело в том, что ленгмюровские волны вообще и ленгмюровские солитоны в частности — волны потенциальные (см., например, (13.35)). На первый взгляд, частица плазмы, пройдя через такое образование, вообще не должна приобретать энергию. (То же самое можно отнести и к квазилинейной теории, только там эта проблема не так бросалась в глаза.) На самом деле все происходит не так. В общем случае поле всегда не совсем потенциально, если имеют место осцилляции. Оказывается, асимптотическое поведение частиц определяется именно этими осцилляциями. Это универсальная проблема теории поля, и нам едва ли стоит в данной книге тратить на нее место и время. Просто обозначив ее, укажем рецепт: делайте так, как будто такой проблемы не существует — результат будет корректным. Что касается одномерного приближения, то в этом случае, как легко понять, потенциал на бесконечности отнюдь не обязательно стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. Понастоящему корректная постановка вопроса возможна только при неоднородных обобщениях солитонной модели.

Еще одна проблема — сохранение солитона как такового при накачке или затухании. Если процесс такого рода слишком силен, т.е. $\gamma > \delta\omega_n$, то нет никаких оснований солитону сохраняться в исходном виде, и никакие его качества не будут существенны для диссипативного процесса. Но в обратном случае характерная частота межмодового взаимодействия в спектре (13.40), (13.41), т.е. $\delta\omega_n$ будет больше, чем диссипативный сдвиг и уширение частоты γ ; значит, солитон в процессе накачки или затухания остается сам собой. Поэтому, изучая такие эффекты, мы можем упростить рассмотрение, работая с солитоном как целым, что и было сделано в уравнении (13.44), или с его фурье-спектром, или с интегралами движения (13.37)–(13.39).

Рассмотрим взаимодействие солитона с электронным пучком. Удобно использовать спектр солитона, представив его как функцию фазовой скорости ω/q (рис. 13.3). В случае стоячего солитона $v_s = 0$, сплошная линия на рис. 13.3, $\partial E_q^2 / \partial |\omega/q| < 0$ всюду. Отсю-

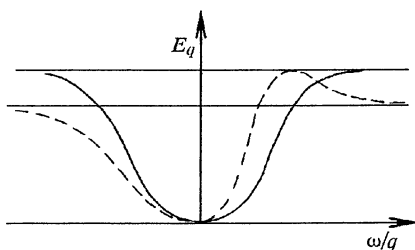


Рис. 13.3. Спектр солитона как функция фазовой скорости

да следует, в частности, что такой солитон может только затухать при взаимодействии с частицами, даже со сколь угодно энергичным пучком. Чтобы это понять, нет нужды даже анализировать уравнение (13.42), вполне достаточно посмотреть на рис. 13.3. В самом деле, возьмем два элемента пучкового распределения, связанные условием $\partial f^b(v_1)/\partial v = -\partial f^b(v_2)/\partial v$; можно видеть, что частицы с $\partial f^b/\partial v < 0$ находятся в резонансе с гармониками большей амплитуды. Таким образом, $\partial W^{(-)}/\partial t > \partial W^{(+)}/\partial t$. В отличие от этого случая, движущийся солитон (пунктирная линия на рис. 13.3) может усиливаться пучком. Более или менее универсальное условие такого усиления можно получить для электронного пучка, узкого в \mathbf{v} -пространстве. Максимальная спектральная интенсивность (см. рис. 13.3) согласуется с равенством $q_{\max} = k$ (см. (13.41)), а посему

$$v_{\max} = \omega_{pe}/q_{\max} = \omega_{pe}/k = 3v_{Te}^2/v_s. \quad (13.45)$$

Если $v_{\min}^b, v_{\max}^b > v_{\max}$, все распределение пучка принадлежит в пространстве скоростей такой области, где амплитуда гармоник падает с ростом фазовой скорости ω/q ; таким образом, ситуация противоположна случаю стоячего солитона. В любом случае для солитона достаточно большой амплитуды, когда справедливы неравенства

$$v_{Te} < \omega/k_0 \ll v_b, \quad (13.46)$$

взаимодействие пучка с солитоном подавлено, потому что гармоники солитона, резонансные с участками распределения пучка с $\partial f/\partial v > 0$ и $\partial f/\partial v < 0$, имеют почти одинаковые амплитуды. Для упрощения многих задач оказывается вполне допустимо аппроксимировать солитон «столыком» или «одиноким импульсом»:

$$\cosh^{-1}(\pi k'/2k_0) \cong \theta(1 + \pi k'/2k_0)\theta(1 - \pi k'/2k_0). \quad (13.47)$$

Такая подстановка как бы отключает взаимодействие солитона с пучком ($\gamma_b = 0$). Более корректная оценка порядка величины накачки или затухания солитона может быть сделана следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \frac{E_0^2}{12\pi n T_e} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \omega_{pe} \frac{n_b}{n_0} \left(\frac{v_{Te}}{v_b}\right)^2 \left(-\frac{\partial \cosh^{-2} \lambda}{\partial \lambda}\right); \quad (13.48)$$

$$\lambda = \pi \left(k - \frac{\omega_{pe}}{v_b}\right) \frac{1}{2k_0}, \quad -\frac{\partial \cosh^{-2} \lambda}{\partial \lambda} = \begin{cases} 8\lambda, & \lambda \ll 1, \\ 4 \exp(-\lambda), & \lambda \gg 1. \end{cases}$$

До настоящего момента мы приводили все формулы, описывающие солитон-пучковое взаимодействие, для случая уединенного солитона. Если же мы хотим построить модель плазменно-пучкового взаимодействия, то нет никаких оснований считать энерговклад ло-

кализованным в пространстве, так что нам придется перейти к рассмотрению взаимодействия пучка с большим ансамблем солитонов. Если эти солитоны распределены в пространстве хаотически, то можно просто подставить квадраты амплитуд гармоник E_q^2 в коэффициент квазилинейной диффузии, как и в случае слабой турбулентности. При этом главным (и не слишком жестким) ограничением будет условие малости пролетного времени частицы между двумя соседними солитонами по сравнению с характерным временем релаксации. Итак, для этого случая

$$\frac{\partial f}{\partial t} \left[+ v_b \frac{\partial f}{\partial x} \right] = \partial_v D(v) \partial_v f, \quad (13.49)$$

где $\partial_v \equiv \partial/\partial v$,

$$D(v) = (3\pi/4)(Nv_{Te}^4/v) \cosh^{-2} [(\pi/2k_0)(k - \omega_{pe}/v)] \quad (13.50)$$

и $N < k_0$ — число солитонов на единицу длины. Второй член (в квадратных скобках) в левой части (13.49) понадобится только при рассмотрении взаимодействия пучка с ансамблем солитонов.

Для самопроверки попробуем вывести тот же коэффициент диффузии иным способом. Прежде всего, имея в виду условие резонанса $v > \omega/k_0$ и используя (13.47), заменим \cosh^{-2} в уравнении (13.50) единицей: $D(v) \approx Nv_{Te}^4/v$.

Теперь рассмотрим отдельный резонансный электрон, пронизывающий систему солитонов. После каждого «солитон-электронного» столкновения электрон приобретает сдвиг по скорости, определяемый уравнением (13.44). Солитоны, однако, расположены в пространстве хаотически, следовательно, хаотичны и их фазы. Поэтому приращение скорости электрона также хаотически меняет знак, и, как следствие, происходит диффузия в пространстве скоростей. Коэффициент диффузии может быть вычислен соответственно общим правилам:

$$D(v) = \langle \Delta v^2 \rangle v_{ef},$$

где v_{ef} — эффективная частота столкновений электрона с солитонами — представляется как $v_{ef} \approx Nv$, а характерный сдвиг скорости электрона после прохождения единичного солитона Δv определяется уравнением (13.44). В итоге получаем:

$$D(v) \approx NvT_e^2/m^2v^2 \approx Nv_{Te}^4/v,$$

т. е. буквально ту же самую формулу. Тем самым подтверждается корректность квазилинейного описания такого взаимодействия — при надлежащей модификации квазилинейной теории.

Одна из важнейших проблем лазерных программ управляемого ядерного синтеза — проблема электронных «хвостов», т. е. генера-

ция немаксвелловских надтепловых электронов, препятствующих установлению оптимального режима абляции. Формируются они по мере энергозклада в плазменную корону вследствие нелинейных эффектов. Мы посвятим этой проблеме гл. 15, но уже здесь полезно отметить, что данная проблема может быть понята и смоделирована (если не до конца решена) в рамках теории сильной ленгмюровской турбулентности.

Пусть ленгмюровская турбулентность существует в форме набора солитонов, N на единицу длины. Для иллюстрации эффекта положим, что все они имеют одну и ту же амплитуду, но не коррелированы по фазам и хаотически размещены в пространстве. Пусть внешняя накачка солитонов уже отключена. Черенковское взаимодействие электронов с гармониками спектра солитонов приводит к затуханию последних (т. е. они без ограничения общности могут считаться стоячими). Напомним, что амплитуды гармоник не зависят от амплитуды солитона E_0 , но лишь ширины максимума на рис. 13.2 или ямы на рис. 13.3, иными словами, коротковолновой или, что то же, минимальной по скоростям границы резонансной области. Как следствие, сама эта граница в процессе затухания солитонов перемещается в направлении больших длин волн или, соответственно, больших скоростей, «вытягивая» за собой электронный «хвост». И, по-видимому, это самый простой из возможных сценариев образования «хвостов». Для аналитического описания удобно использовать замкнутую систему уравнений (13.48)–(13.50), представленную в следующей форме:

$$\partial f / \partial t = (12 / \pi^2) N v_{Te} [E_0^3 / (24 \pi n T)^{3/2}] \partial_\chi \chi^{-1} \cosh^{-2} \chi^{-1} \partial_\chi f, \quad (13.51)$$

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \pi^3 e v_{Te}^2 \int_0^\infty d\chi \cosh^{-2} \chi^{-1} \frac{\partial f}{\partial \chi}, \quad (13.52)$$

$$\chi = e E_0 v / (6^{1/2} \pi \omega_{pe} T). \quad (13.53)$$

Эта система уравнений очевидно является автомодельной. Естественно, решение ее следует искать в соответствующей форме. Опущая детали вычислительной процедуры, приведем окончательный результат:

$$E_0 = (4 \pi n T)^{1/2} (N v_{Te} t)^{-1/3},$$

$$f = \frac{3}{2} (n T)^{1/2} e^{-1} N v_{Te}^3 \times \begin{cases} v_0^{-4} \exp \left[-\frac{4}{9} 6^{-1/2} \pi^{-3} (N v_{Te} t)^{-1} \left(\frac{v}{v_{Te}}\right)^3 \right], & v \gg v_0(t), \\ v^{-4}, & v \leq v_0(t), \end{cases} \quad (13.54)$$

$$v_0(t) = \frac{2}{5} 6^{1/2} v_{Te} (N v_{Te} t)^{1/3}.$$

Пожалуй, самая интересная особенность данного решения — в том, что функция распределения электронов состоит из двух частей: зависящей от времени при $v > v_0$ и стационарной (но также автомоделной) при $v < v_0$. Последняя как раз и представляет собой электронный хвост, формирующийся вследствие квазилинейной эволюции. Когда $t \rightarrow \infty$, солитоны, как можно видеть из (13.54), полностью затухают, а функция распределения $f_\infty \sim v^{-4}$ устанавливается во всем пространстве скоростей. Лишь одно неравенство ограничивает максимальную скорость в хвосте. Решение остается в силе, пока солитоны не перекрываются, т. е. $v_0 < \omega_{pe} N$. Зависимость f_∞ от v может быть получена и без вычислений. Действительно, рассмотрим закон подобия, следующий из (13.54):

$$\partial f / \partial t \sim f E_0^3 \Rightarrow E_0 \sim v_0^{-1} \sim t^{-1/3}, \quad (13.55)$$

$$E_0 \sim f t \Rightarrow f \sim t^{-4/3}.$$

В области пространства скоростей $v < v_0$ членковское взаимодействие экспоненциально мало из-за асимптотической малости амплитуд фурье-гармоник. Отсюда следует, что функция распределения в этой области должна быть стационарной, но в то же время она образуется в результате автомоделной эволюции, и поэтому ей следует быть автомоделной. Единственная функция такого рода есть

$$f_\infty \sim t^{-4/3} (v_0/v)^4 \sim v^{-4}. \quad (13.56)$$

Нам еще предстоит воспользоваться этим методом в гл. 15. Полное число электронов, вовлеченных в процесс перегрева, не может быть определено в рамках автомоделных уравнений (13.51)–(13.53), поскольку зависит от начальных условий. Можно также принять во внимание эффекты солитон-солитонной корреляции, следствием чего будет баллистическая мода (см. гл. 3), или, допустим, распределение солитонов по амплитудам $F(E_0)$. В обоих случаях, как и во многих других, аналитическое рассмотрение оказывается более (или даже чересчур) сложным. Тогда это проблема уже для численного эксперимента. Но наиболее разумным представляется ограничиться простейшим решением, приведенным выше, так как сама по себе задача уже «переупрощена» за счет рассмотрения в рамках одномерной модели.

Попытаемся ввести и нелинейную диссипацию — эффект типа индуцированного рассеяния волн на частицах — применительно к физике солитонов. Полезно в этой связи подчеркнуть, что трех- и четырехплазменные взаимодействия уже учтены в рамках уравнений Захарова. В нашем случае трехволновой процесс по порядку нелинейности ниже, чем рассеяние на частицах из-за фазовой корре-

ляции (когерентное ВЧ-наполнение в яме солитона). Эффект же индуцированного рассеяния всегда остается некогерентным (пока и поскольку не вступают в игру монохроматические пучки заряженных частиц). Рассмотрим в качестве примера процесс (1-i-1)-рассеяния, который в теории слабой турбулентности является наиболее эффективным среди процессов нелинейной диссипации. Условие нелинейного резонанса

$$(\omega - \omega') / |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_{Ti} \leq 1 \quad (13.57)$$

оказывается в случае ленгмюровского солитона особенно наглядным. Как уже не раз отмечалось, низкочастотное звуковое возмущение (яма плотности) самосогласовано с ВЧ-наполнением — это общее биение всех захваченных ВЧ-мод; следовательно, (13.57) — условие нелинейного черенковского резонанса ионов плазмы с вынужденным звуковым возмущением, сопровождающим ленгмюровский солитон.

Для начала предположим, что скорость и амплитуда ленгмюровского солитона достаточно малы: $v_s \ll v_{Ti}$, $k_0 r_{De} \ll (m/M)^{1/2}$. Таким образом, солитон является существенно дозвуковым и квазистационарным, поэтому его минимум плотности обусловлен потенциальным горбом (13.28). Соответственно все ионы делятся на две группы: пролетные и непролетные. (Захвата в данном случае быть не может, потому что нет потенциальной ямы.) В системе отсчета, движущейся вместе с солитоном, непролетные ионы — это те, у которых скорость меньше, чем $v_{oi}(\xi)$, причем

$$v_{oi}(\xi) = [(2e/M)(\Phi_{\max} - \Phi(\xi))]^{1/2} = [v_{Ti} E_0 / (4\pi n T_e)]^{1/2} \text{th } k_0 \xi. \quad (13.58)$$

Нелинейная диссипация обеспечивается отражением непролетных ионов от потенциального горба. В квазистационарной задаче эти непролетные частицы приходят из бесконечности и на бесконечность уходят, так что $\text{th } k_0 \xi \Rightarrow 1$ в уравнении (13.58). В лабораторной системе отсчета непролетные ионы принадлежат интервалу скоростей

$$v_s - v_{oi} < v < v_s + v_{oi}.$$

Приращение энергии данного иона при отражении по модулю равно $2Mv_s |v_s - v|$. Темп энергетических потерь солитона (на единицу площади поперечного сечения) можно выразить следующим образом:

$$d\mathcal{E}/dt = Mn \int_0^{v_{oi}} [f^i(v_s + \delta v) - f^i(v_s - \delta v)] 2v_s (\delta v)^2 d\delta v. \quad (13.59)$$

Возьмем, ради простоты, в качестве f^i максвелловскую функцию и проведем вычисления в предельном случае $v_{01} \ll v_s \ll v_{Ti}$, тогда результат оказывается следующим:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{9}{4} (2\pi)^{-3/2} \omega_{pe} \frac{T_e}{e} \left(\frac{MT_i}{mT_e} \right)^{1/2} (kr_{De})^2 \frac{E_0^4}{(4\pi nT_e)^{3/2}}. \quad (13.60)$$

Самое время попытаться уяснить для себя, что означает эта «диссипация». Во-первых, затухание Ландау звуковой компоненты солитона не означает, вообще говоря, понижения амплитуды солитона, так как звук в данном случае — не собственная мода, а вынужденная (биения), в рамках уравнений (13.19). Во-вторых, мы знаем, что в приближении слабой турбулентности этот процесс сохраняет число ленгмюровских плазмонов. Как раз дозвуковой предел по амплитуде $k_0 r_{De} < (m/M)^{1/2}$ удобен для ответа на все вопросы. Действительно, в этом пределе можно пренебречь излучением звуковых волн; следовательно, можно вывести уравнение для импульса солитона по той же схеме, что и (13.60):

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{3}{4} (2\pi)^{-3/2} \left[\frac{MT_i}{mT_e} \right]^{1/2} \frac{kr_{De} E_0^4}{4\pi nT_e}. \quad (13.61)$$

Напомним, что

$$P = I_0 k, \quad \mathcal{E} \cong I_0 \left(1 + \frac{3}{2} k^2 r_{De}^2 \right),$$

а последующие члены разложения E несущественны в пределе $k_0 r_{De} < (m/M)^{1/2}$. Уравнения (13.60) и (13.61) совместимы лишь в случае $I_0 = \text{inv}$. Таким образом, число квантов в результате индуцированного рассеяния и в самом деле остается постоянным. Только дисперсионный член в I_2 зависит от t , что дает

$$\frac{d(kr_{De})^2}{dt} = -\frac{3}{4} (3\pi)^{-1/2} \omega_{pe} \frac{MT_i}{mT_e} \frac{E_0^3}{(4\pi nT_e)^{3/2}} (kr_{De})^2. \quad (13.62)$$

Из (13.62) следует экспоненциальное затухание скорости солитона $v_s = 3v_{Te}(kr_{De})$ без существенного изменения его амплитуды — это немедленно приводит к эффекту конечной длины пробега солитона. Интегрирование уравнения (13.62) по времени дает

$$\lambda^{(i)} = 8(3\pi)^{1/2} r_{De} (kr_{De})_{t=0} (mT_e/MT_i)^{1/2} E_0^{-3} (4\pi nT_e)^{3/2}. \quad (13.63)$$

Этот результат получен для квазистатического солитона малой амплитуды. Предельный случай больших амплитуд $E_0^2 > (4\pi nT_e)(m/M)$ интересен тем, что солитон в этом случае может существовать только как стоячий. Действительно, уравнение (13.60) остается справедли-

вым и в этом пределе, хотя уравнением (13.61) пользоваться уже нельзя — необходимо учитывать в балансе импульса излучение звука. Но теперь уже мы можем прямо воспользоваться законом сохранения числа квантов и снова прийти к уравнению (13.62), из которого сразу следует $\lambda^{(i)} \approx k_0^{-1}$. Наоборот, для солитонов второго типа, у которых $\Phi(\xi) < 0$, влияние ионной диссипации исключено, но они могут тормозиться за счет взаимодействия с электронами (мы, однако, в настоящей книге не станем на этом останавливаться). Остается обсудить еще один вопрос. Могут ли играть какую-либо роль в процессе нелинейной диссипации ленгмюровского солитона пролетные частицы? Пусть солитон движется с постоянной скоростью (такое движение может быть следствием плато, установившегося на функции распределения резонансных частиц). Тогда трение, обусловленное пролетными ионами, можно представить в следующей форме:

$$d\mathcal{E}/dt = - \int dx dv f^i(x, v, t) v d(Mv)/dt. \quad (13.64)$$

Правая часть (13.64) представляет собой обмен энергией между солитоном и пролетающими сквозь него ионами в данный момент времени. В квазистационарном режиме, т. е. при $v_s = \text{const}$, должен сохраняться поток частиц

$$f(x, v, t) v(x, t) dv = f_M(v) v dv, \quad (13.65)$$

где f_M — максвелловская функция на бесконечности. Таким образом, сила, действующая на пролетный ион, равна:

$$d(Mv)/dt = - \partial(e\Phi(\xi))/\partial\xi + M dv_s/dt, \quad \xi = x - v_s t. \quad (13.66)$$

Если скорость солитона постоянна, то эта сила — потенциальная, и тогда

$$d\mathcal{E}/dt = - \int dv v f_M(v) \int_{-\infty}^{+\infty} dx d(Mv)/dt = 0. \quad (13.67)$$

Таким образом, если скорость солитона постоянна, пролетные частицы ни к какой дополнительной диссипации не приводят. Это непосредственно вытекает из главного свойства солитона — пространственной локализации. После смещения всего лишь на собственную ширину солитон уже наверняка имеет дело с самосогласованной функцией распределения частиц.

Тем не менее, это не означает, что пролетные частицы вообще не способны принять участие в диссипации. Если непролетные частицы уже обеспечивают торможение солитона, пролетные частицы также меняют свою энергию, взбираясь на потенциальный горб, а затем скатываясь с него. Грубо говоря, дело в том, что скатываются они с более медленно движущейся горки, чем та, на которую вначале карабкались. Однако это означает вклад не в силу трения, а в

эффективную массу солитона. По всей видимости, проблема эта не будет решена и тогда, когда настоящая книга окажется в руках у читателя.

Эффект нелинейного торможения и конечной «длины свободного пробега» ленгмюровских солитонов позволяет рассмотреть достаточно сложные сценарии одномерной ленгмюровской турбулентности в аналитической форме. Но, увы, в большинстве случаев даже и одномерная турбулентность поддается только численному анализу.

13.4. Солитонная турбулентность

Идея солитонной турбулентности колмогоровского типа была выдвинута в 1973 г. (Кингсеп, Рудаков, Судан). Эта, по-видимому, простейшая модель сильно турбулентного состояния по сегодняшним представлениям выглядит адекватной моделью одномерной ленгмюровской турбулентности в режиме слабой или умеренной накачки внешним источником.

Для построения сильно турбулентного сценария необходимо обеспечить надлежащее направление потока энергии в k -пространстве. Как уже отмечалось, проблема моделей развитой слабой турбулентности состоит в «неправильном» направлении этого потока. Причина — в особой роли нелинейной диссипации, в первую очередь индуцированного рассеяния волн на частицах (см. гл. 9). Иное дело режим сильной турбулентности. В самом деле, уравнения Захарова (13.18) или (13.19) включают в себя эффекты трех- и четырехволновых процессов, но включают их в сильно коррелированной форме, тогда как индуцированное рассеяние остается тем же, что и при случайных фазах. И потому межсолитонное взаимодействие может в принципе обеспечить более эффективным образом поток в малые масштабы, нежели нелинейная диссипация — в большие (а в случае сильной корреляции потока в большие масштабы, как мы только что убедились, может вообще не состояться — все ограничится торможением солитонов). Подчеркнем еще раз: характерные свойства трехмерной турбулентности иные, хотя ее динамика может быть часто представлена на языке «трехмерных солитонов». Но в одномерном случае именно описанные выше ленгмюровские солитоны оказываются возможным использовать как «кирпичики» для построения сильнотурбулентной конструкции.

Фундаментальное предположение цитированной выше работы состоит в том, что поток энергии обеспечивается процессами слияния солитонов «два в один» при столкновениях. Аргументы состояли в следующем.

1. Рассматривая интегралы движения (13.37)–(13.39), нетрудно убедиться в том, что уравнение (13.37) разрешает процессы как «два в один», так и «один в два», т.е. распад и слияние, но уравнение (13.39) разрешает уже только второй из этих процессов, первый

же запрещен законом сохранения энергии. Это задает правильное направление потока энергии по масштабам.

2. Чтобы избежать многосолитонного коллапса, придется предположить, что только одинаковые солитоны могут сливаться при столкновениях, по крайней мере, такая возможность должна быть тем меньше, чем больше отличие в амплитудах солитонов. Это отнюдь не выглядит невероятным à priori. Действительно, если амплитуды солитонов заметно отличаются, один из них — с меньшей амплитудой — для другого оказывается как бы квазиклассической ямой, так что их взаимодействие представляется маловероятным.

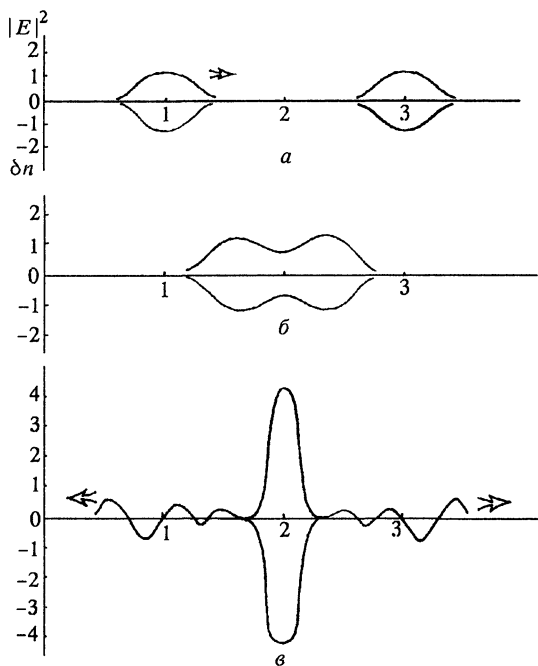


Рис. 13.4. Три стадии солитон-солитонного слияния

Оба эти предположения были впоследствии успешно подтверждены в численных экспериментах (Дегтярев и др., 1974 г.). Дополнительно установлено только одно — правда, существенное — обстоятельство, касающееся важной роли звуковых волн (шумового фона) в динамике многосолитонных систем. Именно ионный звук обеспечивает сток избытка энергии при слиянии. Качественная картина взаимодействия «два в один» в этих численных экспериментах представлена на рис. 13.4. Посмотрев на рис. 13.4в, можно увидеть, как этот звук (крылья) уносит избыточную энергию. Кроме того, «тяжелые» кванты звука принимают активное участие и в балансе им-

пульса (хотя в симметричной картине, представленной на рис. 13.4, такой проблемы нет). Вся эта картина отвечает скорее случаю «сверхзвуковых» амплитуд $E_0/(8\pi nT)^{1/2} > (m/M)^{1/2}$, а в противоположном пределе динамика слишком близка к той, что следует из уравнения (13.20), которая, как уже говорилось, не является в прямом смысле турбулентной, но полностью интегрируемой (аналогичную ситуацию для КДВ-солитонов см. в гл. 16).

Уединенный солитон стабилен, распад его запрещен уравнением (13.39). В режиме развитой турбулентности такой распад оказывается все же разрешен, но с обязательным участием ионно-звуковой волны. В конечном счете динамика оказывается очень сложной, но преимущественное направление потока энергии в сторону малых масштабов сохраняется (см. рис. 9.3а), как и его основной механизм — слияние солитонов. Фундаментальный процесс в солитонной модели отличен от такового в модели Колмогорова; здесь он скорее «шагообразный» или прыжковый, соответственно схеме $(E_0) + (E_0) \rightarrow (2E_0)$. И все же, если источник турбулентности в k -пространстве является достаточно узким, а инерционный интервал — достаточно широким, спектр внутри инерционного интервала будет непрерывным. Сток энергии турбулентных пульсаций в области больших k или малых масштабов без проблем может быть обеспечен затуханием Ландау подобно тому, как это представлено в разделе 13.3.

Пусть W — средняя плотность энергии турбулентного состояния, а L — длина одномерной плазменной системы. Введем набор фундаментальных состояний в предположении, что в каждом из них энергия распределена между N идентичными солитонами, так что N — параметр состояния. Амплитуду E_0 можно определить из соотношения

$$WL = NE_0(N) = (2\pi)^{-1} 6^{1/2} e^{-1} E_0(N) NT. \quad (13.68)$$

Максимальное число солитонов в произвольном состоянии можно определить исходя из условия плотной упаковки $N_{\max} \approx k_0 L$, откуда следует

$$N_{\max} \cong \frac{1}{2} 6^{-1/2} \left(\frac{W}{nT} \right)^{1/2} \frac{L}{r_{De}}. \quad (13.69)$$

Минимальное число солитонов определяется дебаевским масштабом или, если существует надтепловой хвост электронов, некоторым $k_{0\max} < r_{De}^{-1}$, определяющим обрезание турбулентного спектра:

$$N_{\min} = \frac{1}{24} \frac{W}{nT} \frac{L}{r_{De}} (k_{0\max} r_{De})^{-1}. \quad (13.70)$$

Как уже сформулировано выше, мы представляем сильную ленгмюровскую турбулентность в виде газа солитонов, взаимодейству-

ющих через парные столкновения. Слаботурбулентный компонент системы предполагается несущественным (строго говоря, мы уже приняли его во внимание, полагая распределение солитонов стохастическим). Тогда любое реальное состояние можно представить в виде разложения по фундаментальным состояниям. Определим $P(N)$ как вероятность состояния (N):

$$P(N) = \Delta n(N)/N, \quad (13.71)$$

где $\Delta n(N)$ — число солитонов с амплитудой $E_0(N)$ в реальном состоянии. Таким образом, $P(N)$ — это еще и доля энергии, приходящаяся на эти солитоны (см. уравнение (13.37)):

$$\Delta \mathcal{E}(N) = \mathcal{E}_0(N)P(N). \quad (13.72)$$

Обычно в численных экспериментах следят за спектральной плотностью энергии в k -пространстве (так же, собственно, построена и модель Колмогорова). Давайте вычислим спектральную интенсивность W_k в зависимости от распределения $P(N)$. Для этого можно использовать разложения (13.40), (13.41). В турбулентном (нкоррелированном) состоянии солитоны расположены в пространстве случайным образом и со случайными фазами. Поэтому мы имеем право суммировать квадраты амплитуд их гармоник:

$$W_k = \frac{12T^2}{Le^2} \int_{N_{\min}}^{N_{\max}} dN NP(N) \cosh^{-2} \frac{3T^2 Nk}{e^2 WL}. \quad (13.73)$$

(Мы вынуждены — ввиду большого объема информации — опустить детали вычислений в надежде, что любознательный читатель сам их проверит.)

Во многих случаях, как уже отмечалось, $\cosh^{-2}(x)$ может быть заменен функцией скачка $\theta(1 - |x|)$, которая обрезает интеграл при

$$N_0 = \frac{1}{3} \left(\frac{e}{T} \right)^2 \frac{WL}{k} < N_{\max}. \quad (13.74)$$

Итак, результат наших вычислений:

$$W_k = \frac{12T^2}{Le^2} \int_{N_{\min}}^{N_0} dN NP(N). \quad (13.75)$$

В большинстве случаев ленгмюровские спектры, полученные в численных экспериментах, могут быть аппроксимированы степенными функциями, причем чаще всего повторяется спектр:

$$W_k \sim k^{-2}. \quad (13.76)$$

В нашей модели ему соответствует, в согласии с уравнением (13.75), следующее распределение вероятностей:

$$P(N) = \text{const.} \quad (13.77)$$

Поскольку нами был использован единственный интеграл движения W , то это абсолютный аналог равномерного распределения по степеням свободы — распределения Рэлея—Джинса. (В фурье-представлении, т.е. по сути в режиме слабой турбулентности, распределение Рэлея—Джинса вырождается в константу $W_k = \text{const} = 2T/\lambda$.) Необходимо, однако, заметить, что наша изначальная идея не имела, по существу, ничего общего с реальной проблемой Рэлея—Джинса, т.е. с термодинамическим равновесием. Мы имеем дело с динамическим равновесием, основанным на постоянном потоке энергии по масштабам, так что это совпадение — следствие, по-видимому, слабой накачки в численных моделях.

В принципе, эти рассуждения можно повторить и для трехмерного случая. Но, как теперь известно, в трехмерной модели не существует стационарных солитонов. Вместо слияния солитонов здесь основную роль в потоке по масштабам играет ленгмюровский коллапс (см. следующую главу). Идея солитонной турбулентности выдвигалась для ленгмюровской моды, но может быть перенесена (и неоднократно переносилась) на другие моды — и не только в физике плазмы, равно как и не только в одномерном приближении.

Наше представление с успехом может быть поставлено в соответствие и более естественному подходу, оперирующему не с вероятностью $P(N)$, а со средним числом солитонов данной амплитуды на единицу длины, т.е. с функцией распределения солитонов:

$$F(E_0) = P(N)N \, dN/dE_0. \quad (13.78)$$

Это зачастую гораздо удобнее, особенно при рассмотрении кинетических задач. В частности, «распределение Рэлея—Джинса», заданное формулой (13.77), трансформируется в следующую функцию распределения:

$$F(E_0) \sim E_0^{-3}. \quad (13.79)$$

Ленгмюровский коллапс

Фундаментальное физическое явление ленгмюровского коллапса впервые было предсказано Захаровым (1972 г.) на базе уравнений (13.18). Согласно решению Захарова, трехмерные каверны с ВЧ-наполнением, подобные ленгмюровским солитонам, не могут, в отличие от последних, быть стационарными, но имеют тенденцию схлопываться, сходясь за конечное время «в точку». Точность последнего утверждения в принципе зависит от уровня приближения, но сам факт схлопывания — свойство универсальное. Следуя установившейся терминологии, мы будем называть такие коллапсирующие образования «кавитонами». Прежде всего мы рассмотрим модельную задачу, по-видимому, далекую от реальной динамики ленгмюровского коллапса, но зато самую простую. Итак, мы предполагаем, что: во-первых, динамика кавитона может быть сферически-симметричной, во-вторых, режим схлопывания — «дозвуковой», т. е. амплитуда поля столь мала, чтобы во втором из уравнений (13.18) можно было пренебречь временными производными. Тогда полная система уравнений вырождается в сферически-симметричное НУШ:

$$2i \frac{\partial E}{\partial \tau} + \partial_r r^{-2} \partial_r r^2 E + |E|^2 E = 0, \quad (14.1)$$

$$\partial_r \equiv \partial / \partial r$$

(для простоты мы пользуемся безразмерными переменными).

Из сравнения уравнений (13.18) и (14.1) следует одно полезное замечание. Из потенциальности вектора \mathbf{E} (т. е. $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$), казалось бы, следует

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{E} \equiv \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \nabla^2 \mathbf{E} \equiv \nabla^2 \mathbf{E}.$$

На самом деле, здесь в случае сферической симметрии нельзя применять оператор ∇^2 , т. е. $r^{-2} \partial_r r^2 \partial_r$, непосредственно к E_r . В уравнении (14.1) дифференциальный оператор все же остается равным $\nabla \operatorname{div} \mathbf{E}$, т. е. $\nabla^2 \mathbf{E}$ — не скалярный оператор. Это обстоятельство, хорошо известное в теории криволинейных координат, нельзя забы-

вать. Граничные условия для уравнения (14.1) выглядят следующим образом:

$$E(0, \tau) = E(\infty, \tau) = 0.$$

Для этого уравнения также существует бесконечное число интегралов движения. Но мы, имея в виду все же не исследование НУШ как такового, а исходную физическую задачу, не будем искать все интегралы уравнения (14.1), но ограничимся тремя основными (см. (13.36), а также (13.37)–(13.39)). В приближении сферической симметрии интеграл импульса I_1 сохраняется тождественным образом, а два других остаются существенными:

$$I_0 = \int_0^{\infty} r^2 |E|^2 dr, \quad (14.2)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \left(\left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 + \frac{2|E|^2}{r^2} - \frac{|E|^4}{2} \right) r^2 dr. \quad (14.3)$$

Кроме того, для уравнения (14.1) можно вывести следующее интегральное соотношение:

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \int_0^{\infty} r^4 |E|^2 dr = 3I_2 - \int_0^{\infty} \left| \frac{\partial E}{\partial r} \right|^2 r^2 dr - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} |E|^2 dr \quad (14.4)$$

(автор и здесь опускает выкладки, имея целью компактное изложение и надеясь, что заинтересованный читатель не затруднится с проверкой вычислений). Интегрируя (14.4) дважды по времени, получаем соотношение, из которого следует полезное неравенство:

$$I \equiv \int_0^{\infty} r^4 |E|^2 dr < \frac{3}{2} I_2 \tau^2 + C_1 \tau + C_2. \quad (14.5)$$

В то же время, в силу определения, $I > 0$. Предположим, что $I_2 < 0$; это значит, что при данном профиле плотности амплитуда достаточно велика. В этом случае неравенство (14.5) может быть верным лишь в течение конечного интервала времени, тем самым и решение может существовать лишь конечное время. Это утверждение было доказано Захаровым (1972 г.); похожие результаты были известны еще раньше в двумерной теории самофокусировки (теорема Таланова). Из этого базового результата и вытекает корректность автомодельной теории, описывающей самосогласованное схлопывание каверны плотности с ВЧ-наполнением «в точку» за конечное время. Правда, в случае произвольной геометрии такая теорема не доказана, так же, впрочем, как и в предельном случае $E_0^2 > 24\pi n T m / M$ (так называемый «сверхзвуковой» коллапс, см. ниже). Но множество численных экспериментов

демонстрирует универсальный характер явления коллапса. Современный уровень вычислительной физики не позволяет еще проследить за трехмерной динамикой ленгмюровской турбулентности и доказать, что коллапс действительно является доминирующим каналом диссипации. Экспериментальные данные по этому вопросу также оставляют желать лучшего. Некоторые эксперименты демонстрируют нечто похожее, но практически всегда результаты допускают, по крайней мере, одно альтернативное объяснение. В существовании самого эффекта коллапса физики сегодня, в общем, не сомневаются; проблема состоит в том, сколь важна роль, принадлежащая ему в самоорганизации турбулентного потока по масштабам.

Популярный аргумент в пользу доминирующей роли коллапса звучит так (Захаров, 1972 г.): пусть существует некоторое образование с $I_2 < 0$. Представим себе, что в процессе нелинейной эволюции оно расщепляется на два или болс, и пусть у одного из них $I_2 > 0$. Тем больше по модулю будут отрицательные I_2 у других фракций; тем вернее в результате мы получим коллапс.

В действительности все, что таким образом доказано, — сам факт коллапса. Остается вопрос, какая доля энергии уйдет по этому каналу?

Общая причина всех этих трудностей состоит в том, что пока у нас нет общих точных решений уравнений (13.18), да и сами эти уравнения являются приближенными, так что их решение еще должно проверяться на экспериментах и численных моделях. Задача не проста. Как мы вскоре увидим, пространственный масштаб ленгмюровского коллапса порядка r_{De} , а временной — порядка $\Delta\tau \approx r_{De}/c_s = \omega_{pi}$, т.е. такой объект для измерений очень тяжел. Тем не менее, большинство тсоретиков-плазмистов сегодня в него верят и отдают ему предпочтение как каналу диссипации (автор принадлежит к этому большинству с тех пор, когда оно было меньшинством, и потому, возможно, несколько пристрастен).

Особенность ленгмюровской турбулентности в режиме коллапса, в отличие от солитонной модели, заключается в том, что поток по масштабам должен осуществляться не эстафетным образом, но в результате временной эволюции отдельных каверн — турбулентность оказывается уже не просто структурной, но как бы структурно-замкнутой. Здесь уже язык фурье-гармоник совершенно не адекватен физической реальности.

В результате пространственного усреднения динамики множества кавитонов разного «возраста» получается непрерывный поток энергии по масштабам. В процессе коллапса кавитоны, в отличие от одномерных солитонов, не взаимодействуют друг с другом, так как межкавитонное расстояние много больше масштаба самого кавитона (они могут быть одного порядка, но лишь на уровне масштаба накачки, а затем в процессе коллапса появляется сильное

неравенство). За характерное время коллапса порядка ω_{pi}^{-1} ни столкновений, ни обмена квантами между кавернами произойти не может. Таким образом, спектр (и сценарий) колмогоровского типа порождается многократно повторенным единичным актом коллапса. Общим с солитонной турбулентностью свойством — помимо общего характера нелинейности — остается сильная пространственная неоднородность. В каждый данный момент времени реализуется не хаос, а очень сложная структура. Свойственное турбулентности хаотическое поведение обнаруживается только при наблюдении той же картины во времени.

Попытаемся построить модель единичного акта. По причинам математического характера коллапс в модели (14.1) очень труден для количественного исследования, так что есть смысл еще раз вернуться к уравнениям Захарова (13.18), но взять их в вырожденной форме. Именно, учтем, что при росте величины E растет одновременно и нелинейный сдвиг частоты. В отличие от солитона, звуковое уравнение теперь описывает не трансляцию, а более сложное движение — некоторую эволюцию ямы плотности. Поэтому, когда $\delta\omega_n > c_s/\delta$, где $\delta \approx k_0^{-1}$ — характерный пространственный масштаб, пространственные производные в левой части (13.18) могут быть опущены, и мы получаем уравнение, описывающее так называемый сверхзвуковой коллапс:

$$\operatorname{div} \left(-i \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \tau} + \frac{3}{2} \omega_{pe} r_{De} \nabla^2 \mathbf{E} \right) = \frac{\omega_{pe}}{2n_0} \operatorname{div} \delta n \mathbf{E}; \quad (14.6)$$

$$\frac{\partial^2 \delta n}{\partial \tau^2} = \frac{\nabla^2 |\mathbf{E}|^2}{16\pi M}.$$

Это приближение корректно, если

$$\delta\omega_n \approx \omega_{pe} k_0^2 r_{De}^2 \gg k_0 c_s.$$

Принимая во внимание, что $k_0 r_{De} \approx E/(8\pi n T)^{1/2}$, получаем следующее неравенство как условие применимости уравнений (14.6):

$$E^2/(8\pi n T) \gg m/M. \quad (14.7)$$

Удовлетворить ему не так уж сложно. Более того, зачастую даже на стадии модуляционной неустойчивости приходится иметь дело с такими или большими амплитудами. А если коллапс начался, стадия, соответствующая уравнению (14.7), выглядит просто неизбежной. В общем, получается, что именно сверхзвуковой режим наиболее типичен для ленгмюровского коллапса. (Коллапс — свойство не только ленгмюровских волн. Для других мод доминирующими оказываются другие режимы коллапса.)

Перепишем уравнения (14.6) в форме законов подобия (или, как говорят, в форме скейлинга):

$$\{E/\tau\} + \{E/\delta^2\} \sim E\{\delta n/n_0\}, \quad (14.8)$$

$$\{\delta n/\tau^2\} \sim \{E^2/\delta^2\}, \quad (14.9)$$

$$I_0 \sim E^2 \delta^3 = \text{const}, \quad (14.10)$$

где δ — пространственный масштаб возмущений как электрического поля, так и плотности, $\tau = t - t_0$ — масштаб времени, а t_0 — формальный момент коллапса в уравнениях (14.6), при этом $\tau < 0$, но $d\tau/dt = 1$. Два последних члена в уравнении (14.8) дают $\delta n \sim \delta^{-2}$; тогда из (14.9) следует $E \sim \tau^{-1}$, и, наконец, (14.10) приводит нас к оценке $\delta \sim \tau^{2/3} I_0^{1/3}$. В результате первый член в уравнении (14.8) оказывается несущественным:

$$\tau^{-1} \ll_{\tau \rightarrow 0} \delta^{-2} \sim \tau^{-4/3},$$

как и опущенные «звуковые» члены в уравнениях (14.6):

$$\delta n/\delta^2 \ll_{\tau \rightarrow 0} \delta n/\tau^2,$$

что и подтверждает сверхзвуковое приближение. И вот, наконец, мы приходим к окончательным оценкам:

$$\delta n \sim \delta^{-2} \sim \tau^{-4/3}, \quad E^2/(8\pi nT) \sim \delta^{-3} \sim \tau^{-2}, \quad (14.11)$$

которые и представляют собой закон подобия сверхзвукового коллапса. Основательные численные эксперименты показали, что коллапсирующий кавитон в сверхзвуковом режиме по форме напоминает эллипсоид с небольшим эксцентриситетом, т.е. с единственным характерным масштабом δ . Вообще говоря, это может и не выполняться на дозвуковой стадии (если кавитон вообще ее проходит). Но как только процесс переходит порог, за которым справедливо неравенство (14.7), модуляционная неустойчивость, которая описывается теми же уравнениями, начинает, действуя в сверхзвуковом режиме, разбивать кавитон на сверхзвуковые одномасштабные острова. Очень скоро они окажутся изолированы друг от друга (коллапс продолжается), т.е. $\delta_i, \delta_j \ll |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$, а их фазы хаотизируются как следствие малых отклонений в начальных амплитудах и/или пространственных масштабах каверн.

Пожалуй, следует отметить некоторую тонкость в трактовке уравнения (14.10). Мы уже отмечали в гл. 13, что I_0 — точный интеграл движения для уравнений Захарова, но лишь адиабатический

инвариант для более общей системы уравнений. Условие сохранения этого интеграла: $\partial/\partial\tau \ll \omega_{pe}$. В то же время уравнение (14.10) придает этому интегралу более сильный смысл, а именно — это закон сохранения числа квантов не просто во всем пространстве, но внутри данной каверны. Чтобы поддержать эту оценку, вернемся еще раз к уравнению (14.6). Если мы ищем решение в виде

$$\mathbf{E} = \varepsilon(\tau)\mathbf{E}(\xi_n) \exp\left(-i \int \delta\omega_n d\tau\right), \quad (14.12)$$

где ξ_n ($n = 1, 2, 3$) — автомодельные переменные, то первое из уравнений (14.6) дает

$$\xi_n = (r_n/r_{De})(\delta\omega_n/\omega_{pe})^{1/2}, \quad \delta n/n_0 \approx \delta\omega_n/\omega_{pe}. \quad (14.13)$$

Тогда из второго уравнения (14.6) немедленно следует $\varepsilon \sim \tau^{-1}$ и т. д. Выполняя все оценки еще раз, придем к следующему результату:

$$I_0 \sim E^2 \delta^3 \sim \varepsilon^2 \delta\omega_n^{3/2} \Rightarrow \delta\omega_n \sim \tau^{-4/3} \gg_{\tau \rightarrow 0} \tau^{-1} \sim \partial/\partial\tau. \quad (14.14)$$

Именно это неравенство, $\delta\omega_n \gg \partial/\partial\tau$, и выводит нас на «следующий этаж» адиабатической инвариантности. Когда временная производная в динамике кавитона много меньше не только ω_{pe} , но и $\delta\omega_n$, число ленгмюровских квантов сохраняется не только во всем пространстве, но и в данной каверне. И тогда скэйлинг (14.11) также будет корректным. В обратном случае $\delta\omega_n \ll \partial/\partial\tau$ (пусть даже $\delta\omega_n \approx \partial/\partial\tau$) такого инварианта нет; число плазмонов сохраняется в целом, но не в отдельной каверне (например, они могут теряться в процессе коллапса). Такой режим характерен, например, для известного процесса самофокусировки.

Единственное явное аналитическое описание коллапсирующего кавитона принадлежит Рудакову и Захарову; это довольно-таки вырожденная мода — коллапсирующий сферически-симметричный квазиплоский солитон (случай принципиально дозвуковой):

$$\begin{aligned} E(r, \tau) &= E_0(R) \cosh^{-1} [k_0(r - R)] \exp [i(kr - \delta\omega_n \tau)], \\ v_s &= dR/d\tau = 3kr_{De} v_{Te}, \end{aligned} \quad (14.15)$$

$$E_0(R) k^2 (1 - v_s^2/c_s^2)^{1/2} = \text{const},$$

$$\delta/R \rightarrow 0, \quad v_s \rightarrow 5^{1/2} c_s, \quad \text{если } R \rightarrow 0.$$

Это очень хороший пример аналитического решения уравнений Захарова; но, конечно, как только амплитуда солитона перейдет «звуковой» предел, он тут же будет разбит модуляционной неустойчивостью на одномасштабные сверхзвуковые коллапсирующие каверны.

Таким образом, внутри инерционного интервала, а зачастую уже и на уровне накачки поток по масштабам обеспечивается сверхзвуковым коллапсом. Приведем адекватный этому случаю спектр в k -представлении, который, хотя и не может отразить должным образом пространственную структуру, удобен для сравнения с другими моделями. Способ его получения напоминает таковой при вычислении спектров солитонной турбулентности, описанный в предыдущей главе. (В сущности, используется то, что компактно в g -пространстве образование образует и в k -пространстве компактный спектр, ширина которого связана с пространственным масштабом соотношением неопределенности.) Можно, задавая поток по масштабам, получить следующее уравнение для спектральной плотности энергии (Галсев и др., 1975 г.):

$$\partial W_k / \partial t = k^{-2} \partial_k (k^2 W_k dk / d\tau), \quad (14.16)$$

где $dk/d\tau$ — характеристика эволюции масштаба в процессе коллапса. Так, для сверхзвуковой моды

$$dk/d\tau \sim d\delta^{-1}/d\tau \sim \tau^{-5/3} k^{5/2}. \quad (14.17)$$

В инерционном интервале, т.е. при $\partial W_k / \partial t = 0$, из уравнений (14.16), (14.17) нетрудно получить

$$W_k \sim k^{-9/2}. \quad (14.18)$$

Представляется все же более корректным тот же результат представить в виде распределения кавитонов по амплитудам $F(E_0)$. Но оказывается гораздо удобнее использовать их «распределение по возрасту»:

$$F(\tau) = \text{const} = Q/\mathcal{E}_i, \quad (14.19)$$

где Q — мощность накачки, переносимая в малые масштабы, а \mathcal{E}_i — начальная энергия кавитона на уровне накачки (точнее — модуляционной неустойчивости). Уравнение (14.19) означает, что кавитоны не могут появляться или исчезать в инерционном интервале. Если мощность накачки остается постоянной, то и число кавитонов любого возраста, от рождения до смерти, должно быть постоянно во времени.

С точки зрения утилизации энергии накачки ленгмюровский коллапс — самый эффективный канал. Из-за его взрывного характера (этот «взрыв наоборот» называют также имплозией) характерное время диссипации нужно оценивать по начальной, самой медленной стадии, т.е. это время развития модуляционной неустойчивости:

$$\tau_{\text{cf}}^{-1} \approx \gamma_{\text{mod}} \approx \begin{cases} \omega_{\text{pe}}(W_0/nT) \approx \omega_{\text{pe}}(k_0 r_{\text{De}})^2, & W_0 \ll nTm/M, \\ \omega_{\text{pe}}(mW_0/MnT)^{1/2} \approx k_0 c_s, & W_0 \gg nTm/M, \end{cases} \quad (14.20)$$

где W_0 — плотность энергии ленгмюровского конденсата плазмонов.

При исследовании диссипации энергии накачки следует работать не только с уравнениями (14.11) или (14.20), но и с уравнениями, описывающими турбулентный нагрев плазмы. Нужно также иметь в виду, что даже слабая диссипация может заметно изменить моду коллапса. В самом деле, все величины в уравнениях (14.11) определены через постоянное число квантов — например, $\delta \sim \tau^{2/3} I_0^{1/3}$. Если имеет место затухание, эти соотношения надо пересматривать. Беда в том, что эффект коллапса локализован в \mathbf{r} -пространстве, а затухание Ландау — напротив, в \mathbf{k} -пространстве (см., например, (2.30)). Получается, что главный эффект диссипации практически невозможно ввести в уравнения Захарова. Но модель, учитывающую влияние затухания на динамику, построить все-таки можно. Она предложена Рудаковым и базируется на результатах численного эксперимента. Установлено, что диссипация затягивает процесс коллапса и возвращает его от сверхзвукового режима к соотношению $\delta n/n \approx \approx E^2/(8\pi nT)$, типичному для дозвукового коллапса. Но дозвуковой коллапс неизбежно стремится пройти звуковой порог, и представляется достаточно естественным, что при существенном влиянии диссипации мы так на пороге и задержимся. Поэтому оставим оба члена в левой части второго из уравнений (13.18) и положим, что они остаются в процессе коллапса величинами одного порядка. В результате мы сконструировали «звуковой» режим ленгмюровского коллапса:

$$\delta = -c_s \tau, \quad \delta n \sim \delta \omega \sim \tau^{-2} \gg \partial/\partial \tau, \quad \varepsilon \sim \tau^{-1}. \quad (14.21)$$

Конечно, такой кавитон уже не может остаться одномасштабным. У нас появилось дополнительное условие, а значит, должен появиться хотя бы еще один масштаб. Итак, их будет два. Меньший определяется стандартным условием $(k_0 r_{De})^2 \approx W/nT$, а больший — сохранением числа квантов $I_0 = \int |\mathbf{E}|^2 d\mathbf{r}$. На первый взгляд, модуляционная неустойчивость должна разрушать такой двухмасштабный кавитон, разбивая его на одномасштабные сгустки. Но диссипация, подавляя сверхзвуковую моду коллапса, одновременно должна гасить и сверхзвуковую модуляционную неустойчивость, равно затягивая все нелинейные процессы. По крайней мере, время ее развития может оказаться того же порядка, что и время схлопывания каверны, так что звуковой режим представляется вполне реальным.

Сильная ленгмюровская турбулентность и проблема турбулентного нагрева плазмы

Рассмотрим задачу о нагреве плазмы в режиме ленгмюровского коллапса. Даже в ситуации, когда конкурируют между собой разные каналы диссипации, ленгмюровский коллапс, если он принимает участие в этом соревновании, имеет все шансы выйти из него победителем. В этом процессе вся энергия, захваченная в каверну, за очень короткое время доставляется в область сильного затухания. Поэтому наша теория может рассматриваться как реалистичная, хотя и упрощенная модель нагрева плазмы в режиме сильной трехмерной ленгмюровской турбулентности.

Пусть мощность накачки постоянна и равна Q , и пусть модуляционная неустойчивость порождает в единицу времени N коллапсирующих кавитонов:

$$Q = N \mathcal{E}_{(i)}, \quad (15.1)$$

где $\mathcal{E}_{(i)} \cong I_{0(i)}$; строго говоря, эти две величины слегка различаются на $I_{2(i)}$ ((i) означает начальный момент времени $t = 0$). Эта разница, которой здесь и далее мы будем пренебрегать, в процессе коллапса может меняться за счет излучения звуковых волн коллапсирующей каверной. Как мы скоро увидим, все результаты тривиально обобщаются на случай $Q = Q(t)$ подстановкой $t' \sim \int Q dt$. Для простоты положим $Q = \text{const}$; кроме того, мы предполагаем, что вся энергия накачки реализуется через коллапс, а всеми остальными каналами диссипации пренебрежем.

Что касается диссипации самого кавитона, то следует, в принципе, обсудить два возможных канала — затухание Ландау и пересечение электронных траекторий, каковое должно происходить при $W \sim nT \rightarrow 1$, когда перепутываются осцилляторное и тепловое движения. Оказывается, такая альтернатива реальна лишь в том случае, когда мы имеем дело с единичным актом ленгмюровского коллапса, но не в режиме постоянной накачки, когда должно доминировать затухание Ландау. Представим себе самое начало процесса

нагрева. Пусть некоторое число кавитонов уже сколлапсировали и, как следствие, в плазме появились «горячие точки». Из этих точек идет поток тепла. (Мы даже можем допустить пересечение траекторий в качестве основного механизма диссипации для кавитонов на этой стадии процесса.)

При сколько-нибудь реальных параметрах плазму в режиме сильной ленгмюровской турбулентности можно считать бесстолкновительной. Это значит, что процесс релаксации неизбежно будет включать «двухтемпературную» функцию распределения электронов, т.е. в точном смысле двух температур у нее не будет, но она должна состоять из холодного ядра (основных электронов) и горячей разреженной короны в v -пространстве, которая образуется при перемешивании электронов, нагретых в горячих точках. Последующие акты коллапса обогащают эту корону, поскольку порождают новые горячие точки. Постепенно образуется хвост высокоэнергичных электронов, который рано или поздно перехватывает на себя всю энергию коллапсирующих каверн — через затухание Ландау. А та энергия, которая в конце концов «сходится в точку», где $W \sim nT$, составит пренебрежимо малую долю начальной энергии кавитона (если коллапс при такой потере энергии вообще дойдет до дебаевского масштаба). Таким образом, в режиме непрерывной накачки — а это типичная задача о нагреве — нам следует рассматривать самосогласованную задачу о затухании Ландау коллапсирующей каверны с ВЧ-наполнением и диффузии электронов в пространстве скоростей. Возможны и менее тривиальные сценарии «слабо-сильной» турбулентности, например, прямая (l-e-s)-конверсия энергии с уровня конденсата непосредственно в электроны с участием звука, источником которого является сильная турбулентность. Мы, однако, ограничимся случаем прямого нагрева электронов в режиме коллапса ленгмюровских волн.

Главная трудность этой теории состоит в том, что едва ли возможно решить аналитически проблему динамики коллапса при учете затухания Ландау (как уже отмечалось в предшествующей главе, трудно даже написать в компактной форме соответствующие уравнения). Следовательно, придется оперировать с простыми моделями. Мы рассмотрим две из них.

1. Можно просто пренебречь влиянием затухания на динамику каверны и взять ее в невозмущенной форме, следя лишь за числом квантов в каверне (см., например, Галеев и др., 1975 г.). Эта модель имеет область применимости — во всяком случае, при адиабатическом медленном затухании кавитона — и позволяет правильно описать асимптотику хвоста при $v \rightarrow \infty$.

2. Звуковая модель, описанная в конце гл. 14, позволяет явно моделировать затухание посредством условия $\delta l \sim E^2$. Ее результаты, хотя и приближенные, все же выглядят более привлекательными (см., например, Кингсеп, 1983 г.).

Сравнительно недавно был достигнут определенный прогресс в корректном решении этой проблемы, но уровень математической сложности и громоздкости не позволяет транслировать этот материал в книге вводного характера. Поэтому подробно рассмотрена будет именно звуковая модель. Кавитон в такой модели должен быть двухмасштабным (гл. 14). Конкретная геометрия каверны может варьироваться. Мы рассмотрим кавитон, имеющий вид плоского диска, а читателю предоставим самостоятельно убедиться, что мода, в которой кавитон имеет вид, например, тонкого цилиндра, приведет в точности к тем же результатам. Основной масштаб задачи — толщина диска δ — представляется в виде

$$\delta = -c_s \tau, \quad r_{De}/\delta \approx E/(24\pi nT)^{1/2}. \quad (15.2)$$

Заметим, что для этой «затянутой» моды коллапса нет оснований нарушать фундаментальное соотношение $W \approx nT(r_{De}/\delta)^2$ (которое нарушается для сверхзвуковой моды). Большой масштаб R определяется из условий

$$\frac{\delta n}{n_0} \approx \left(\frac{r_{De}}{\delta}\right)^2 \approx \frac{W}{nT},$$

$$\mathcal{E} \sim R^2 \delta W \sim R^2/\delta. \quad (15.3)$$

Подставляя (15.2) в (15.3), получаем энергию кавитона

$$\mathcal{E}(\tau) = 3 \frac{T}{e} \left(\frac{\pi n T M}{m}\right)^{1/2} \frac{R^2(\tau)}{|\omega_{pe} \tau|}, \quad (15.4)$$

Пока мы можем считать потери пренебрежимо малыми, т.е. $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{(i)}$; отсюда следует

$$R_0^2(\tau) \equiv R^2(\tau)|_{\nu=0} = \frac{2}{3} \mathcal{E}_{(i)} (e/T)^2 |c_s \tau|, \quad (15.5)$$

а когда затухание становится существенным, $R(\tau)$ стремится к нулю быстрее в соответствии с уравнением (15.4).

Интересно отметить еще одно обстоятельство. Типичный масштаб времени коллапса

$$|\Delta \tau| \cong \delta/c_s \approx (k_0 c_s)^{-1} \quad (15.6)$$

совпадает с обратным инкрементом модуляционной неустойчивости в сверхзвуковом режиме (см. уравнение (14.20)). Поэтому с этой точки зрения звуковая модель выглядит как экстраполяция функциональной зависимости, характерной для начальной стадии, на весь процесс коллапса. Это, в частности, лишний раз подтверждает, что даже сверхзвуковая модуляционная неустойчивость не может испортить такой коллапсирующий диск.

При условии (15.4) поле кавитона в направлении его малого размера не должно особенно отличаться от поля одномерного ленгмюровского солитона, спектральное разложение которого нам уже известно:

$$E_k = \frac{E_0}{2k_0} \cosh^{-1} \left(\frac{\pi k}{2k_0} \right), \quad k_0 = 24^{-1/2} e E_0 T^{-1},$$

откуда следует

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int 2\gamma_k W_k dk = 3 \left(\frac{T}{e} \right)^2 \pi R^2(\tau) \int_0^\infty dk \gamma_k \cosh^{-2} \left(\frac{\pi k}{2k_0} \right). \quad (15.7)$$

Если электронная функция распределения $f(v)$ изотропна, то согласно результатам гл. 2 $\gamma_k = -\pi^2 \omega^4 k^{-3} f(\omega/k)$. Подставляя это выражение в уравнение (15.7), после простых преобразований получим систему уравнений

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\tau} = -\Gamma \tau \mathcal{E},$$

$$\Gamma = \frac{\pi^2}{2} c_s \omega_{pe}^2 \int_0^\infty dv v f(v) \cosh^{-2} \left[\frac{\pi v(\tau)}{2v} \right], \quad (15.8)$$

$$v(\tau) = -\omega_{pe} c_s \tau.$$

Взаимодействие достаточно быстрого ($v > \omega_{pe} \delta$) электрона с единственным уединенным кавитоном напоминает простое ускорение заряженной частицы в поле плоского конденсатора — этот вопрос уже обсуждался в гл. 13 (см. уравнение (13.44)). Представим себе, что мы имеем дело с ансамблем таких кавитонов, случайным образом распределенных в пространстве. Тогда эволюция электронного распределения в пространстве скоростей должна описываться уравнением диффузии

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v^{-2} \partial_v v^2 D \partial_v f, \quad D \cong \langle \Delta v^2 \rangle \nu_{ef}. \quad (15.9)$$

Здесь Δv — модуль приращения скорости электрона в результате прохождения «конденсатора». Мы можем провести дальнейшие вычисления в предположениях, что, во-первых, все кавитоны не только хаотически расположены в пространстве, но и хаотически ориентированы; во-вторых, поле внутри кавитона не сильно отличается от поля одномерного солитона:

$$E(x) = E_0 \cosh^{-1} k_0 x \Rightarrow \langle \Delta v^2 \rangle = \frac{3\pi^2 T^2}{m^2 v^2}. \quad (15.10)$$

Что касается эффективной частоты столкновений, то она может быть записана в виде

$$v_{\text{ef}} = \pi v \int_{E_{\min}(v)}^{(24\pi n T)^{1/2}} R^2(E) F(E) dE = \pi v \int_{\tau(v)}^{\tau(v_{T_e})} R^2(\tau) F(\tau) d\tau, \quad (15.11)$$

где $E_{\min}(v) = (24\pi n T)^{1/2}(v_{T_e}/v)$, $\tau(v) = -v/(\omega_{\text{pe}} c_s)$, $F(E)$ и $F(\tau)$ — функции распределения кавитонов, соответственно по амплитудам и по возрасту. Принимая во внимание (14.19), подставляя (15.11) и (15.10) в уравнение (15.9), используя также уравнения (15.4) и (15.5), получаем, наконец, коэффициент диффузии в пространстве скоростей:

$$D = \pi^3 2^{1/2} \frac{Q v_{T_e} v}{4\pi n T} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \int_0^1 \frac{\mathcal{E}(\chi)}{\mathcal{E}(i)} \chi d\chi, \quad \chi = -\omega_{\text{pe}} c_s \tau/v \quad (15.12)$$

(читатель может нас проверить). Мы удержали в уравнениях (15.8) и (15.9) разные обозначения для времени, потому что время в этих уравнениях сильно отличается по характерному масштабу, а также и по началу отсчета ($\tau = 0$ для каждого кавитона в момент формального коллапса). Вряд ли возможно решить в общем виде даже ту модельную систему уравнений, которая нами получена, но она допускает автомодельную замену переменных. Введем характерную скорость горячих электронов $v_0(t)$. Рассмотрим прежде всего уравнение (15.9) в диапазоне скоростей $v \gg v_0(t)$, где затухание мало (но моду коллапса считаем уже звуковой):

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v^{-2} \partial_v D_1 v^3 \partial_v f, \quad D_1(v) = \pi^3 2^{-1/2} \left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} \frac{Q v_{T_e}}{4\pi n T}. \quad (15.13)$$

Сделаем подстановку $t \rightarrow D_1 t$, а затем будем искать функцию распределения в автомодельной форме

$$f = \varphi(t) \Phi(\xi), \quad \xi = v/t. \quad (15.14)$$

Из условия постоянства во времени мощности накачки

$$Q = \text{const} \sim \frac{\partial \left(\int f v^2 dv \right)}{\partial t} \quad (15.15)$$

получим $\varphi(t) = \alpha/t^4$, соответственно (15.13) трансформируется в следующее уравнение:

$$-4\Phi - \xi d_\xi \Phi = \xi^{-2} d_\xi \xi^3 d_\xi \Phi, \quad d_\xi \equiv d/d\xi. \quad (15.16)$$

Таким образом, мы провели автомодельное разделение переменных. Уравнение (15.16) имеет точное решение:

$$\Phi = (\xi - 3) \exp(4 - \xi). \quad (15.17)$$

Далее рассмотрим интервал скоростей $v \ll v_0(t)$. Коэффициент диффузии здесь экспоненциально мал, так как кавитоны уже отдали всю свою энергию при $v \approx v_0(t)$. Это следует из уравнения затухания, записанного в автомодельной форме. Грубо говоря,

$$|\gamma(\omega_{pe}/v_0)| \tau(v_0/\omega_{pe}) \approx 1, \quad (15.18)$$

где $\gamma(k)$ — декремент затухания Ландау, $\tau(\delta)$ — возраст кавитона, однозначно связанный с его основным масштабом. Как мы увидим далее, уравнение (15.18) как раз определяет полное число ускоренных электронов как функцию $v_0(t)$. Итак, полагая энергию кавитонов, пребывающих в резонансе с медленными частицами $v \ll v_0(t)$, пренебрежимо малой в сравнении с начальной, мы должны считать функцию распределения электронов в этой области стационарной, но в то же время она должна быть автомодельной, так как формируется как следствие автомодельного процесса. Единственная стационарная функция, удовлетворяющая закону скэйлинга (15.14), есть

$$f_\infty(v) = C/v^4 \equiv \varphi(t)\xi^{-4}. \quad (15.19)$$

При $t \rightarrow \infty$, $f \rightarrow f_\infty$ во всем интервале скоростей электронного хвоста. (Керн электронного распределения в нашем рассмотрении не фигурирует.) Естественно сшить решения (15.17) и (15.19) в точке $\xi = 4$, дабы гарантировать нулевой поток частиц из нерезонансной области ($D \approx 0$) в резонансную, где $D(v) \neq 0$, т.е. $\partial f/\partial v \sim d\Phi/d\xi$ должны быть равны нулю на границе раздела, и $\xi = 4$ — как раз подходящая точка. Таким образом, нами установлен приближенный вид автомодельного решения:

$$f(v) = \begin{cases} C/v^4, & v < v_0(t) = D_1 t, \\ C v_0^{-4} (v/D_1 t - 3) \exp(4 - v/D_1 t), & v > v_0(t). \end{cases} \quad (15.20)$$

Число резонансных частиц падает во времени —

$$n_R = 4\pi n_0 C/v_0(t) \sim t^{-1}. \quad (15.21)$$

Эта автомодельная эволюция электронного распределения представлена на рис. 15.1. Ширина области взаимодействия для функции (15.20) порядка $\Delta v \approx v_0/4$. Конечно, точный вид функции распределения может быть установлен только численно, но мы можем дать более корректную оценку для Δv , исходя из условия, что полное число частиц обязано сохраняться:

$$\int_{v_0}^{\infty} f_\infty(v) dv = \varphi(t) \int_{\xi_0}^{\infty} \Phi(\xi) d\xi,$$

откуда $\Delta v \cong v_0$.

Нам предстоит, однако, доказать, что автомодельная замена переменных, которую мы нашли, верна не только для усеченного уравнения (15.13), но и для полной системы (15.8), (15.9), в частности и при $v \approx v_0$. Если это будет доказано, точный вид решения в этой области будет для нас не так уж и важен. Начнем с уравне-

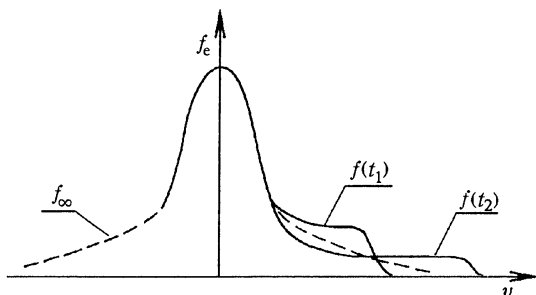


Рис. 15.1. Образование надтеплового электронного хвоста: $t_2 > t$, $f_\infty = f(v)_{t \rightarrow \infty}$

ния (15.8). Сделаем замену переменной $x = \omega_{pe} c_s \tau / (D_1 t)$. Начальное условие $E_{\tau \rightarrow -\infty} = E_{(i)}$ переходит в совершенно аналогичное, а само уравнение (15.8) принимает вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dx} = \text{const} \cdot \mathcal{E} x \int_x^\infty d\xi \xi \Phi(\xi) \cosh^{-2}(x/\xi). \quad (15.22)$$

Все функции «медленного» времени t в (15.22) оказались теперь функциями автомодельной переменной. Далее мы покажем, что автомодельная замена (15.14) справедлива для уравнения (15.9) с коэффициентом диффузии (15.12). В самом же выражении (15.12) $\chi = x/\xi$, поэтому

$$D(v) = v \cdot 2D_1 \xi^{-2} \int_0^\xi dx x \frac{\mathcal{E}(x)}{\mathcal{E}_{(i)}}. \quad (15.23)$$

Фактор v в уравнении (15.23) и образует скэйлинг (15.14). Он умножается на функцию, имеющую тот же самый скэйлинг. Закон затухания (15.22) также с этим скэйлингом согласуется. Таким образом, автомодельность полной системы уравнений доказана.

Определим константу C в уравнении (15.20). Она однозначно определяется условием полного затухания кавитона в области взаимодействия, т.е. условием (15.18):

$$|\gamma| \approx \pi^2 \omega v_0^3 f(v_0) = \pi^2 \omega_{pe} C / v_0 \geq \tau^{-1} = c_s \omega_{pe} / v_0, \quad (15.24)$$

откуда сразу следует $C = \beta c_s$, $\beta \approx 1$. Не имеет смысла определять эту величину с большей точностью ввиду сделанных нами упроще-

ний. Но важно отметить, что в процессе нагрева в любой момент времени существуют две области в пространстве скоростей, весьма различные по своим свойствам. Именно, слева от $v_0(t)$, т.е. при $v < v_0(t)$, формируется стационарная функция распределения $f_\infty \sim v^{-4}$, в которой содержится основная масса частиц, и число их растет во времени в соответствии с законом движения границы $v_0(t) \sim t$. Справа от $v_0(t)$ ($v > v_0(t)$) идет экспоненциально спадающий фронт распределения с числом частиц, падающим во времени в соответствии с законом

$$\frac{n_R}{n_0} \cong \int_{v_0}^{\infty} f_\infty dv \approx \left(\frac{m}{M}\right)^{1/2} \frac{v_{Te}}{v_0} \sim t^{-1}, \quad (15.25)$$

но именно эта часть распределения обеспечивает всю диссипацию энергии накачки в данный момент времени и содержит примерно половину всей энергии хвоста на данный момент (как следствие, полная энергия частиц, вычисленная по функции f_∞ , расходится, т.е. в реальной задаче энерговклад определяется самыми быстрыми частицами). Полное число частиц, вовлеченных в процесс нагрева, может быть определено из f_∞ и по порядку величины равно $(m/M)^{1/2}$. Окончательное выражение для распределения частиц электронного хвоста:

$$f^e(v) = \begin{cases} \beta c_s v^{-4}, & v < v_0(t), \\ \beta c_s v_0^{-4} (4v/v_0 - 3) \exp(4 - v/v_0), & v > v_0(t), \end{cases} \quad (15.26)$$

$$v_0(t) \cong \mu Q t / n M c_s, \quad \beta, \mu \approx 1$$

(см. рис. 15.1). Характерная скорость резонансных частиц $v_0(t)$ — единственная величина, зависящая от мощности накачки Q . Все прочие параметры решения более или менее универсальны. Интересно, что автомодельное решение (15.26) не зависит от полного энерговклада, даже если энергия хвоста превосходит энергию, соответствующую ядру функции распределения. Это нетрудно понять, исходя, например, из линейного дисперсионного уравнения

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} + \frac{n_R}{n_0} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{TR}^2} = 0. \quad (15.27)$$

Чем выше температура резонансных электронов, тем меньше их влияние на дисперсию звука. Для ленгмюровских волн это не так, но в режиме коллапса пространственная дисперсия ленгмюровских волн дает вклад, несущественный по сравнению с нелинейностью. Поэтому нет никаких препятствий к экстраполяции уравнения

(15.26) на случай большого энерговклада $n_R T_R > n_0 T$. Как уже было отмечено, полный энерговклад

$$\int Q dt \sim \int_0^{v_{\max}} \beta v^{-4} \frac{mv^2}{2} 4\pi v^2 dv \quad (15.28)$$

определяется верхним пределом интегрирования. Таким образом, в режиме непрерывной накачки эффект нагрева ограничен только временем. Но участвует в процессе нагрева лишь малая группа частиц.

Эти результаты интересны и важны для ряда программ управляемого синтеза, основанных на принципе турбулентного нагрева плазмы. Например, надтепловые электронные хвосты способны самым драматическим образом расстроить динамику абляции лазерной мишени. И это, по-видимому, послужило главной причиной отказа от целого направления в лазерном УТС, базирующегося на использовании CO_2 -лазеров. По той же причине в программе неодимовых лазеров произошел переход на высшие гармоники, а также на мишени нетривиальной конструкции.

При моделировании систем, динамика которых может спровоцировать переход в режим сильной турбулентности, наши результаты могли бы быть полезны. Не так уж просто, скажем, смоделировать нагрев плазмы методом «particle-in-cell», а в то же время результаты (15.26) и подобные им возможно «имплантировать» в гидродинамические коды, а затем моделировать всю цепочку процессов типа «нагрев-абляция-зажигание-горение», характерную для задач о ядерном синтезе.

И, наконец, нам кажется, что динамика сильной турбулентности настолько красива, что уже только поэтому стоит изучения.

Солитоны и бесстолкновительные ударные волны

Как солитоны, так и ударные волны (УВ) известны уже несколько десятков лет. И, более того, почти каждый наш читатель мог наблюдать солитоны на мелкой воде и «слышать» ударную волну при прохождении реактивным самолетом звукового барьера. Неудивительно, что эти два нелинейных явления были в числе первых среди тех, что изучались в физике плазмы.

Еще в конце 50-х годов стало ясно, что физика плазмы может оба понятия существенно обогатить, если рассмотреть их в бесстолкновительном пределе. При этом движение, связанное с солитонами, оказывается коллективной природы, в отличие от акустики или теории мелкой воды. Не менее интересны бесстолкновительные ударные волны с шириной фронта, много меньшей формальной длины свободного пробега частиц. (На первый взгляд, это выглядит вообще невероятным.)

На сегодняшний день оба явления хорошо изучены (список возможных ссылок был бы просто необозримым). Более того, по этому вопросу существует прекрасная обзорная и учебная литература, с которой автор настоящей книги не считал бы возможным конкурировать. В качестве примеров укажем обзор Сагдеева (1964 г.), книги Кадомцева (1988 г.), Арцимовича и Сагдеева (1979 г.), Захарова и др. (1980 г.).

Читателя, интересующегося данной темой, мы отсылаем к названным источникам, а в настоящей книге целесообразно ограничиться кратким введением в предмет, поскольку невозможно представить себе курс нелинейной физики плазмы, в котором тема солитонов и УВ вообще не затрагивается. Наша цель в данной главе — сравнить различные классы нелинейных явлений и попытаться «навести мосты», соединяющие материал книги с этой классической темой. Во избежание громоздких вычислений мы выберем в качестве базового примера ионно-звуковой класс движений в незамагниченной плазме (хотя, конечно, динамика замагниченной плазмы представляет в данной теме более содержательную физику). Уравнения (4.19)–(4.22) возьмем в вырожденном одномерном

виде:

$$M \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -e \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (16.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i v)}{\partial x} = 0, \quad (16.2)$$

$$-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e \left[n_i - n_0 \exp \left(\frac{e\varphi}{T} \right) \right]. \quad (16.3)$$

Пусть u — скорость нелинейной волны и пусть все величины зависят, как обычно, только от $z = x - ut$. Тогда

$$M(v - u) \frac{dv}{dz} = -e \frac{d\varphi}{dz}, \quad (16.4)$$

$$\partial_z [n_i(v - u)] = 0, \quad (16.5)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 4\pi n_0 e \left[\exp \left(\frac{e\varphi}{T} \right) - \frac{n_i}{n_0} \right]. \quad (16.6)$$

Уравнения (16.4), (16.5) можно переписать в виде двух интегралов движения в движущейся системе отсчета:

$$\frac{M(v-u)^2}{2} + e\varphi = C_1, \quad (16.7)$$

$$n_i(v - u) = C_2, \quad (16.8)$$

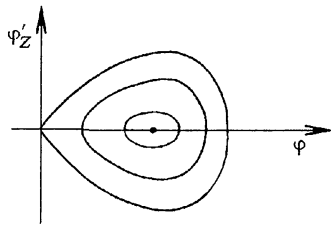


Рис. 16.1. Фазовая плоскость уравнения (16.9)

где C_2 естественно определить как $-n_0 u$. Что же касается величины C_1 , то мы можем рассматривать ее просто как произвольную аддитивную добавку к потенциалу. Удобно взять ее равной $Mu^2/2$. Окончательно, после подстановки в (16.6), получается следующее уравнение:

$$\frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 4\pi n_0 e \left[\exp \left(\frac{e\varphi}{T} \right) - \frac{u}{(u^2 - 2e\varphi/M)^{1/2}} \right], \quad (16.9)$$

которое можно решать стандартным образом, как, например, НУШ. Именно, берем его первый интеграл

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 = 4\pi n_0 e \left[\frac{T}{e} \exp \left(\frac{e\varphi}{T} \right) + \frac{Mu}{e} \left(u^2 - \frac{2e\varphi}{M} \right)^{1/2} \right] + \text{const.} \quad (16.10)$$

Варьируя константу, получаем непрерывное семейство решений уравнения (16.10). Их можно увидеть на фазовой плоскости $d\varphi/dz$ в зависимости от φ (рис. 16.1). Внутренние кривые на рис. 16.1 позволяют конструировать различные периодические (но не синусоидальные) нелинейные волны, тогда как внешняя удовлетворяет условию $d\varphi/dz \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow 0$ — это как раз солитон. Обозначим

его амплитуду через φ_0 , тогда $d\varphi/dz = 0$ при $\varphi = \varphi_0$ и (16.10) дает (см. Веденов и др., 1961 г.):

$$u = \left(\frac{T}{2M}\right)^{1/2} \frac{\exp(e\varphi_0/T) - 1}{[\exp(e\varphi_0/T) - 1 - e\varphi_0/T]^{1/2}}. \quad (16.11)$$

В отличие от ленгмюровского солитона эта скорость не является свободным параметром, она зависит от амплитуды φ_0 . Если $\varphi_0 \ll T/e$, $u \cong c_s$, для больших амплитуд $u > c_s$. В общем случае решение уравнения (16.10) не может быть представлено в явной форме; это возможно лишь в пределе малых амплитуд:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\psi}{d\xi^2} &= \frac{1}{2} \frac{d(\psi'_\xi)^2}{d\psi} = \exp \psi - \frac{v}{(v^2 - 2\psi)^{1/2}} \cong \\ &\cong \psi(1 - v^{-2}) + \frac{1}{2} \psi^2(1 - 3v^{-4}), \end{aligned} \quad (16.12)$$

где $\xi = z/r_{De}$, $v = u/c_s \rightarrow 1$, $\psi = e\varphi/T \ll 1$. Приближенное решение (16.12) можно представить в виде

$$\psi \cong \psi_0 \cosh^{-2}(\xi/\delta), \quad v \cong 1 + \psi_0/3, \quad (16.13)$$

$$\Delta \cong 2(1 - v^{-2})^{-1/2} \cong \left(\frac{2}{3} \psi_0\right)^{1/2}.$$

Итак, мы видим, что в отличие от ленгмюровского солитона, ионно-звуковой может быть задан единственным параметром (неважно,

каким: φ_0 , $u \cong c_s(1 + e\varphi_0/3T)$ или $\Delta \cong \left(\frac{2}{3} \frac{e\varphi_0}{T}\right)^{1/2}$). У этого солитона

нет ВЧ-наполнения; это просто бегущий потенциальный максимум, сопровождаемый ямой плотности в согласии с уравнением (16.8). Два таких солитона изображены на рис. 16.2; масштаб их скоростей задан стрелками. У более интенсивного солитона и скорость больше.

Для описания нелинейных волн часто используется полезная аналогия. Перепишем (16.9) еще раз:

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = \exp \psi - \frac{v}{(v^2 - 2\psi)^{1/2}} \equiv -\frac{dU}{d\psi}, \quad (16.14)$$

$$\begin{aligned} U &= 1 - \exp \psi + v^2 - v(v^2 - 2\psi)^{1/2}, \\ U &\rightarrow 0, \quad \text{если} \quad \psi \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (16.15)$$

Уравнение (16.14) напоминает тривиальное уравнение движения частицы

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx},$$

таким образом, $U(\psi)$ в (16.15) играет роль потенциальной ямы. Соответственно все периодические решения, представленные внутренними кривыми на рис. 16.1, могут быть смоделированы финитным периодическим движением частиц, захваченных в эту яму, а солитон, в свою очередь, соответствует вырожденному инфинитному движению при $\mathcal{E} = 0$. Так же, как и в случае ленгмюровского солитона, это самое устойчивое решение. Это можно понять хотя бы из того факта, что его энергия на единицу площади сечения конечна, а энергия периодической волны бесконечна.

Мы уже редуцировали уравнение (16.9) до двух первых членов его разложения в ряд Тэйлора. И оказывается, что это приближение

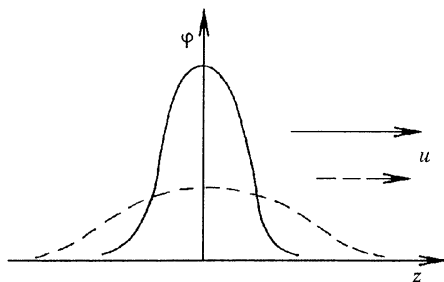


Рис. 16.2. КДВ-солитоны: быстрый (сплошная линия) и более медленный (штриховая линия)

представляет едва ли менее универсальный интерес, нежели линейное, т.е. гармонические колебания. Очень многие нелинейные волны самой разной физической природы описываются в пределе слабой (умеренной) нелинейности следующим уравнением:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0}{k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad (16.16)$$

которое называют по традиции уравнением Кортевега—де Вриза или КДВ (точнее было бы КДФ). Оно оказывается правильным в случае любой моды с достаточно слабым отклонением от линейного закона дисперсии:

$$\omega/k \cong c_0(1 - k^2/k_0^2 + \dots). \quad (16.17)$$

В уравнении (16.16) u — произвольная физическая величина, которая могла бы рассматриваться как амплитуда возмущений, второй член обусловлен нелинейностью, а третий представляет собой эффект дисперсии (см. (16.17)). Таким образом, все нелинейные волны, включая солитоны, являются результатом конкуренции двух эффектов — нелинейности и дисперсии. Это можно отнести и к ленгмюровским солитонам, хотя это и не случай КДВ.

Возможны два типа КДВ солитонов в зависимости от характера линейного закона дисперсии (рис. 16.3). До сих пор мы обсуждали ионно-звуковые солитоны с отрицательным законом дисперсии (кривая 1 на рис. 16.3), когда групповая скорость $\partial\omega/\partial k$ падает с ростом k . В этом случае чем больше амплитуда в некоторой области профиля возмущения $u(x, t)$, тем больше и конвективный член, ведущий к опрокидыванию волны. Но этот эффект компенсируется уменьшением групповой скорости. Как следствие укрупнение останавливается и формируется стационарный профиль. В обратном случае (кривая 2 на рис. 16.3) такой солитон существовать не может, но может существовать опрокинутый, т. е. бегущая яма вместо бегущего максимума.

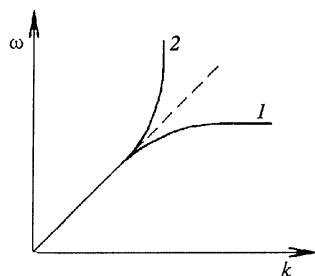


Рис. 16.3. Отрицательная (1) и положительная (2) дисперсии

Общее аналитическое решение уравнения КДВ было построено Гарднером и др. (1967 г.), и это был выдающийся результат, один из тех, на которых стоит нелинейная физика. Мы не будем, однако, обсуждать технику этой работы, а тем более различные приложения данной теории. Ограничимся качественной формулировкой конкретного результата: если задана нелинейная среда, подчиняющаяся описанию КДВ, эволюция начального возмущения $u(x)$ полностью определена, так как уравнение КДВ полностью интегрируемо. Как следствие любое начальное возмущение со временем превращается, вообще говоря, в набор солитонов различных амплитуд и некоторую добавку типа спектра слабонелинейных волн, исчезающего со временем. Все солитоны движутся со сверхзвуковыми скоростями, и только слабонелинейный пакет движется с дозвуковой скоростью. Когда два солитона из этого семейства сталкиваются, они просто проходят друг друга насквозь, образуя на время столкновения двухсолитонное (в общем случае N -солитонное) состояние. Ничего подобного процессу, показанному на рис. 13.4, не происходит (что, впрочем, как показано уже Захаровым, верно и для точных решений НУШ).

Интересно, что мерой нелинейности оказывается отнюдь не амплитуда как таковая (скажем, u/c_0 , если u — гидродинамическая скорость). Для КДВ-солитона справедлива следующая оценка:

$$\Delta^2 u_0 \cong 12c_0/k_0, \quad \text{т. е.} \quad \sigma \equiv u_0 k_0^2 \Delta^2 c_0^{-1} \approx 1. \quad (16.18)$$

Если $\sigma \ll 1$ для начального возмущения, из него не рождается ни одного солитона, даже когда амплитуда u_0 достаточно велика, так что это возмущение должно рассматриваться как линейное, и из него может сформироваться только слабонелинейный волновой пакет. Если $\sigma \approx 1$, получим один солитон и некоторую волновую добавку

(дозвуковой «хвост» сверхзвукового решения). И, наконец, при $\sigma \gg 1$ мы имеем дело с пределом сильной нелинейности, описанным выше, — он может иметь умеренную амплитуду u_0 , но очень широкое распределение.

С другой стороны, даже лучшая из теорий всегда имеет ограниченную область применимости. И уравнение КДВ — всего лишь очень важное и полезное приближение. НУШ также полностью интегрируемо и потому не годится для описания турбулентности типа газа ленгмюровских солитонов. Конечно, и при переходе к приближению КДВ потери неизбежны. Рассмотрим пример. До сих пор мы работали с гидродинамической моделью нелинейной динамики. Это, между прочим, означает, что вся масса ионов обязана переваливать через потенциальный горб (см. рис. 16.2). В системе отсчета, движущейся вместе с солитоном, их скорость равна u . Верхний предел амплитуды, а значит, и скорости распространения, дается уравнением

$$e\varphi_{0\max} \approx \frac{Mu^2}{2}. \quad (16.19)$$

Эта величина может быть вычислена в явном виде с помощью уравнений (16.11), (16.19) (Сагдеев, 1964 г.) и равна:

$$\varphi_{0\max} \approx 1,3 T/e, \quad \mathcal{M} \approx 1,6, \quad (16.20)$$

где $\mathcal{M} \equiv u/c_s$ — число Маха. Для больших \mathcal{M} дисперсия не может сбалансировать нелинейного укручения; следовательно, происходит опрокидывание, сопровождающееся многопоточковой динамикой. В этом случае, в противоположность уравнению (16.18), а равно и знаменитому решению Гарднера и др., ламинарной волны существовать более не может. Вместо нее формируется турбулентная ударная волна — также бесстолкновительная, в которой роль классической длины пробега в формировании фронта играет эффективная длина рассеяния (см. гл. 10, 11). Мы не будем останавливаться на деталях.

Нам кажутся более интересными и поучительными «ламинарные» бесстолкновительные волны. Представим себе, что опрокидывания не случилось, и нет неустойчивостей на фронте, так что нет и причин перенормировать длину свободного пробега. Тем не менее, мы можем получить решение типа УВ, используя, как обычно, адиабату Гюгонио. Вообще говоря, при рассмотрении УВ в рамках газовой динамики обычно не возникает вопроса о скорости диссипации, более того — о ее физической природе. Как известно, параметры диссипации существенным образом определяют ширину и тонкую структуру ударного фронта, но никак не основные параметры УВ. Добавим в уравнение КДВ обычный диссипативный член:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_0}{k_0^2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (16.21)$$

а потом, моделируя его решение как движение частицы в потенциальной яме:

$$\frac{c_0}{k_0^2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \eta \frac{du}{dx} = - \frac{\partial U}{\partial u}, \quad (16.22)$$

нам следует ожидать в итоге «падения» частицы на дно ямы. В зависимости от вязкости η движение частицы может быть осциллирующим или аperiодическим. Когда мы будем искать решение уравнения (16.21) в стандартном виде $u \equiv u(x - \omega t)$, где ω — скорость фронта волны, уравнение (16.22) можно переписать так:

$$\frac{c_0}{k_0^2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \eta \frac{du}{dx} = \omega u - \frac{u^2}{2}, \quad (16.23)$$

откуда немедленно следует

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 0 \Rightarrow \begin{cases} u \rightarrow 2\omega, \\ t \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (16.24)$$

т.е. гидродинамическая скорость за фронтом УВ в два раза больше, чем скорость фронта. То же самое можно сказать и об ионно-звуковой УВ (см. рис. 16.4). Картинка соответствует кривой 1

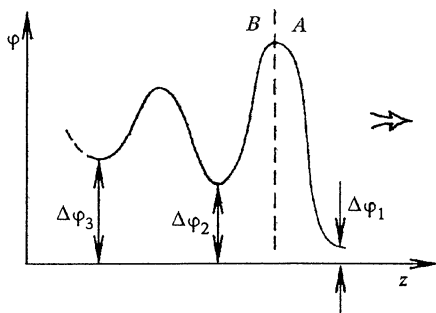


Рис. 16.4. Структура ударного фронта в случае отрицательной линейной дисперсии

на рис. 16.3 (отрицательная дисперсия). В самом деле, осциллирующий хвост должен запаздывать по отношению к солитонам; как следствие при этом типе дисперсии УВ имеет отчетливый фронт, а за ним — осциллирующую структуру. В обратном случае положительной дисперсии (см. кривую 2 на рис. 16.3) осциллирующий хвост должен обогнать солитоны, и сам фронт УВ должен быть осциллирующим, как показано на рис. 16.5.

Хотелось бы предостеречь читателя от опасности переупрощения физического сценария такого сложного явления, как бесстолкновительная УВ. Впрочем, это стандартная цена за универсальность математической физики. Даже не сомневаясь в применимости модифицированного уравнения КДВ, зададимся вопросом: каков все-таки реаль-

ный механизм, обеспечивающий в бесстолкновительной плазме эффективную вязкость? Можно ли ее моделировать в такой форме?

На самом деле ламинарные бесстолкновительные УВ более сложны по своей конструкции. В частности, ионно-звуковая УВ в немагнитной плазме существенным образом связана с тем же самым механизмом, который тормозил ленгмюровские солитоны (см. раздел 13.3). Эта волна гонит перед собой хвост непролетных частиц, которые не могут перевалить через потенциальный горб первого солитона на рис. 16.4. Ионное движение в этой области, без сомнения, многопоточное, и только кинетическое рассмотрение может привести к достаточно корректному описанию структуры фронта. Но качественная картина будет та же, что и на рис. 16.4; более того, грубые характеристики УВ от подобных деталей вообще не зависят. Итак, в плазме действительно может существовать движение типа

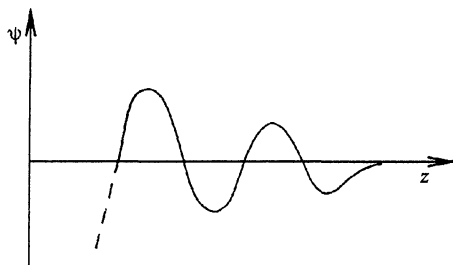


Рис. 16.5. Структура ударного фронта в случае положительной линейной дисперсии

ударной волны с характерным масштабом фронта, много меньшим, чем длина свободного пробега, и причина этого в том, что не только турбулентность может обеспечить эффективную диссипацию, но даже и регулярное движение, приводящее к осцилляциям. Конечно, только настоящая диссипация может в конечном счете погасить эти осцилляции, но так же, как это происходит, например, в затухании Ландау, ее параметры не влияют существенно на характеристики волны. Попытавшись построить УВ совсем без диссипации, мы получили бы цепочку солитонов — и ничего более. Но сколь угодно слабая диссипация переводит эту цепочку в ударную волну. Варьируется лишь число осцилляций на фронте. Довольно похожую ситуацию мы еще увидим в последующих главах, посвященных электронной магнитной гидродинамике, а именно в эффекте так называемого ЭМГ-сопротивления.

В заключение подчеркнем еще раз: эта глава, никак не претендуя на полноту изложения, дает лишь введение в физику солитонов и бесстолкновительных ударных волн. Это, если так можно выразиться, «камертон», демонстрирующий нам общность данной физики с теорией турбулентной плазмы.

Электронная магнитная гидродинамика. Конвективные скин-эффекты

Эта и последующая главы по своему содержанию заметно отличаются от предыдущих. Во-первых, они посвящены иному, нежели турбулентность, аспекту нелинейной физики — нелинейным структурам. (В какой-то мере, впрочем, это относилось уже к солитонам и кавитонам.) Во-вторых, в данном круге явлений принципиально важную роль играет магнитное поле, тогда как до сих пор мы от него уходили, имея в виду максимальное упрощение наших задач. В-третьих, все эффекты, рассмотренные ниже, — исключительно гидродинамической природы; все они достаточно просты, достаточно наглядны, более или менее макроскопичны. В принципе, все они могут проявлять себя не только в плазме, но и в металлах — твердых и жидких, в полупроводниках, тонких пленках и т.д. Преимущественно наше изложение будет следовать обзору Кингсепы и др. (1987 г.) с надлежащей адаптацией применительно к задачам данной книги. Последнее десятилетие ознаменовалось «взрывным» развитием электронной магнитной гидродинамики (ЭМГ). Иногда возникал невольный вопрос: почему столь очевидные и наглядные эффекты не были обнаружены ранее? Возможная причина — в глубоком внутреннем родстве с тем материалом, который был изложен в предшествующих главах, обусловленном не столько общностью физики, сколько универсальными нелинейными свойствами. Таким образом, становление ЭМГ происходило в общем контексте нелинейной физики плазмы.

17.1. Основные уравнения

В основе модели ЭМГ лежит известная иерархия времен релаксации:

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei}^{(e)} = 1 : (M/m)^{1/2} : (M/m), \quad (17.1)$$

которой обусловлена применимость двухкомпонентной (в общем случае многокомпонентной) магнитной гидродинамики. В самом де-

ле, из неравенств (17.1) следует, что тепловое равновесие внутри каждого из компонентов устанавливается значительно раньше, чем полное равновесие. Это дает нам право в широком диапазоне параметров пользоваться парой уравнений Эйлера, связанных лишь силой трения между компонентами:

$$\begin{aligned} n \frac{d(mv_e)}{dt} &= -ne \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e, \mathbf{B}] \right) - \nabla P_e - R_{ie} n_i n (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \\ n_i \frac{d(Mv_i)}{dt} &= Zn_i e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i, \mathbf{B}] \right) - \nabla P_i - R_{ic} n_i n (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \end{aligned} \quad (17.2)$$

вместе с уравнениями переноса и непрерывности для каждого компонента и уравнениями Максвелла. Здесь и далее мы будем обсуждать лишь такие процессы и явления, в которых не нарушается квазинейтральность. Это, в частности, означает, что токовая скорость не превосходит электронной тепловой. (В обратном случае в сценарий вносится неустойчивость Бунемана, приводящая к образованию двойных слоев.) С другой стороны, давайте рассмотрим такой класс движений, для которых смещение ионов ограничивается инерцией, в этом случае можно отбросить второе из уравнений (17.2), но количественно это означает, что скорость течения электронов (токовая скорость) должна быть много больше, чем характерная массовая, в качестве таковой естественно взять альфвеновскую или ионно-звуковую. Эти оценки совпадают, если учесть, что у самоорганизующихся динамических плазменных систем $B^2 \approx 8\pi nT$. Итак, мы будем работать в следующем окне параметров:

$$c_s, v_\Lambda \ll j/ne \ll v_{Te}, v_{Ae}. \quad (17.3)$$

Обозначим характерный пространственный масштаб задачи через a . По условию квазинейтральности $a \gg c/\omega_{pe}$. Тем самым можно пренебречь и током смещения; соответственно, теорема о циркуляции

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (17.4)$$

трансформируется в оценку $B \approx (4\pi/c)ja$. Как следствие (17.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} ja(4\pi/Mnc^2)^{1/2} \approx B(4\pi nM)^{-1/2} \ll j/nE \ll B(4\pi nm)^{-1/2} \approx \\ \approx ja(4\pi/mnc^2)^{1/2}, \end{aligned}$$

а из него, в свою очередь, следует

$$c/\omega_{pi} \gg a \gg c/\omega_{pe}. \quad (17.5)$$

Условия (17.3) и (17.5) определяют пределы применимости электронной магнитной гидродинамики. В качестве основных уравнений ЭМГ удобно использовать уравнения диффузии и вмороженности

магнитного поля. Напомним сначала, как они выглядят в МГД-приближении. Достаточно очевидная цепочка равенств

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \frac{1}{\sigma} \mathbf{B}$$

в сочетании с уравнением электромагнитной индукции

$$c \operatorname{rot} \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

дает в предположении $\sigma = \text{const}$:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}] + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (17.6)$$

Уравнение (17.6) содержит два эффекта: диффузию поля ($\nabla^2 \mathbf{B}$) и вмороженность поля в проводящую среду ($\operatorname{rot} [\mathbf{v}, \mathbf{B}]$). Хорошо известны многие проявления последнего эффекта — ограничимся указанием на гигантские магнитные поля нейтронных звезд как следствии вмороженности поля в вещество при коллапсе. При рассмотрении двухкомпонентной МГД (см. (17.2)) возникает вопрос о том, что же и куда в действительности вморожено, или, точнее, какой более общий закон вырождается в пределе однокомпонентной МГД в уравнение (17.6). Чтобы ответ выглядел как можно более ясным, упростим насколько возможно нашу задачу, положив $\sigma = \text{const}$ и $P_{ei} \equiv P_{ei}(n_{ei})$ — это закон типа политропы. Взяв ротор от обоих уравнений (17.2) и комбинируя импульсы $\mathbf{p}_{e,i}$ с вектор-потенциалом \mathbf{A} (напоминаем: $\mathbf{B} \equiv \operatorname{rot} \mathbf{A}$) в обобщенном импульсе компонента ($\alpha = i, e$)

$$\mathbf{P}_\alpha = \mathbf{p}_\alpha + \frac{e_\alpha}{c} \mathbf{A}, \quad (17.7)$$

получим систему двух уравнений:

$$\partial_t \operatorname{rot} \mathbf{P}_e = \operatorname{rot} [\mathbf{v}_e, \operatorname{rot} \mathbf{P}_e] - \frac{e}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{j}, \quad (17.8)$$

$$\partial_t \operatorname{rot} \mathbf{P}_i = \operatorname{rot} [\mathbf{v}_i, \operatorname{rot} \mathbf{P}_i] + \frac{Ze}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{j}. \quad (17.9)$$

В пределе однокомпонентной МГД ($\mathbf{p}_e \rightarrow 0$, $\mathbf{v}_e \approx \mathbf{v}_i$) в случае, например, идеальной проводимости $\sigma \rightarrow \infty$ система уравнений (17.8), (17.9) и в самом деле может быть сведена к одному уравнению типа (17.6). Если при этом в обобщенном импульсе доминирует его механическая компонента \mathbf{p}_i , то $\operatorname{rot} \mathbf{v}$ окажется вморожен в вещество — это идеальная гидродинамика невязкой несжимаемой жидкости. В обратном случае в вещество вморожено поле, а в общем случае, как можно видеть из системы уравнений (17.8), (17.9), в каждый компонент системы вморожен ротор обобщенного импульса данного компонента.

Перейдем к случаю ЭМГ. Тогда существенным остается лишь одно уравнение (17.8); более того, как правило, само оно может быть заметно упрощено при использовании двух малых параметров:

$$\partial/\partial t \ll \omega_{Be}, \quad c/\omega_{pe} \ll a.$$

В результате получаем простой ответ:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \text{rot} [\mathbf{j}/ne, \mathbf{B}] = -\frac{c}{\sigma} \text{rot} \mathbf{j}, \quad (17.10)$$

т.е. поле оказывается замороженным в электронное течение. Уравнение (17.10) можно использовать вместе с уравнением $\text{div} \mathbf{j} = 0$, но оно превращается в тождество как следствие (17.4), и оба они вместе справедливы при $\partial/\partial t \ll \omega_{pe}$, т.е. когда ток смещения несуществен, а электронное течение не нарушает квазинейтральности. В принципе уравнение (17.10) может быть получено непосредственно из обобщенного закона Ома в пренебрежении электронной инерцией, но с учетом эффекта Холла:

$$0 = -ne\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \frac{ne}{\sigma} \mathbf{j}. \quad (17.11)$$

Взяв ротор от уравнения (17.11), снова получаем (17.10). Этот вывод, конечно, короче, но не столь определенны границы применимости. Во всяком случае, можно очень часто рассматривать ЭМГ как МГД с учетом и доминирующей ролью эффекта Холла.

Что касается движения ионов (см. (17.9)), то, вообще говоря, оно может быть нетривиальным, и его описание не сведется к уравнению замороженности поля, ибо не может поле быть заморожено сразу в два компонента. Как правило, в границах применимости ЭМГ ионное движение оказывается близко к идеальной гидродинамике с замороженным ротором скорости. При этом характерные электронные и ионные времена существенно различны: можно рассматривать динамику электронных течений на фоне медленной вариации внешних условий, вызванной ионным движением.

Все результаты данной главы последуют исключительно из уравнения (17.10). Как мы скоро увидим, некоторые из них окажутся достаточно неожиданными.

17.2. Нелинейный транспорт поля. Конвективная волна переноса

Пусть плазма занимает полупространство $z > 0$ и в момент времени $t = 0$ поле в плазме $\mathbf{B} = 0$, и в то же время в любой момент поле на границе равно постоянной величине \mathbf{B}_0 . Для определенности мы вначале рассмотрим плоскую геометрию с $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_y$ и $\partial/\partial y = 0$ (рис. 17.1). В такой плоской геометрии уравнение (17.10) может вырождаться в самое ординарное МГД-уравнение диффузии магнитного поля. В самом деле,

$$[\mathbf{j}, \mathbf{B}] = -\frac{c}{8\pi} \nabla B^2 + \frac{c}{4\pi} (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B}. \quad (17.12)$$

Второй член в правой части уравнения (17.12), который один и может дать нелинейный вклад в $\text{rot} [\mathbf{j}, \mathbf{B}]$, в случае прямых силовых линий тождественно равен нулю, поскольку напрямую связан с вектором кривизны силовых линий \mathbf{c} :

$$(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} = B^2\mathbf{c}, \quad |\mathbf{c}| \equiv R_B^{-1}, \quad \mathbf{c} \parallel -\mathbf{R}_B,$$

где \mathbf{R}_B — текущий радиус кривизны. Однако конвективный член в уравнении (17.10), т.е. второй в левой части, может и не быть ра-

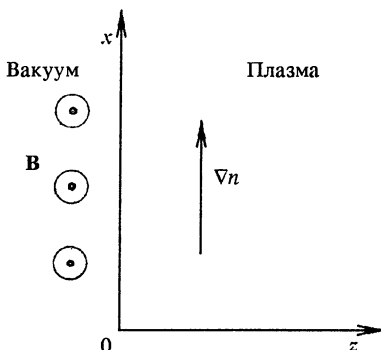


Рис. 17.1. Геометрия задачи о конвективном скине

вен нулю, если существует отличный от нуля градиент концентрации. Чтобы «очистить» его от всего лишнего, положим опять $\sigma = \text{const}$, и тогда

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{c}{8\pi e} [\nabla B^2, \nabla(n^{-1})] = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (17.13)$$

По-прежнему стремясь к максимально простому ответу, рассмотрим такую геометрию задачи, когда вектор ∇n параллелен поверхности плазмы и ортогонален \mathbf{B} , как это изображено на рис. 17.1. Тогда нелинейный конвективный член обуславливает трансляцию поля в направлении оси z . Пока глубина проникновения не слишком велика, что определяется неравенством

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \gg \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad (17.14)$$

обычным для классической задачи о скин-эффекте, уравнение (17.13) может быть представлено в классическом виде уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \kappa B \frac{\partial B}{\partial z} = D \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}, \quad (17.15)$$

где $\kappa = (c/4\pi e)(\partial n^{-1}/\partial x)$ и $D = c^2/4\pi\sigma$.

Итак, даже в самой простой геометрии и в наиболее упрощающих задачу предположениях она в рамках ЭМГ (с учетом первого

ненулевого ЭМГ-эффекта) уже оказывается нелинейной. Но нелинейность эта — особого рода. Дело в том, что уравнение Бюргерса относится к так называемым скрыто-линейным уравнениям. Несложной подстановкой

$$B = (2D/\kappa)\partial_z \ln |\varphi| \quad (17.16)$$

уравнение Бюргерса переводится в линейное уравнение диффузии

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}, \quad (17.17)$$

и притом множества решений обоих уравнений совпадают. В частности, из наших начально-граничных условий

$$\begin{aligned} t = 0: & \quad B = 0, \quad z > 0, \\ t \geq 0: & \quad B = B_0, \quad z = 0 \end{aligned} \quad (17.18)$$

следует точное решение

$$\begin{aligned} \varphi = & -\operatorname{erf} [z/2(Dt)^{1/2}] + \\ & + \exp [(\kappa B_0/2D)(z + \kappa B_0 t/2)] \operatorname{erfc} [(z + \kappa B_0 t)/2(Dt)^{1/2}]. \end{aligned} \quad (17.19)$$

Проверять его не стоит. Вообще, его единственное достоинство — демонстрация точной интегрируемости уравнения (17.15); будучи нелинейным, оно остается столь же полностью интегрируемым, как и уравнение диффузии, описывающее стандартный скин-эффект. Для понимания физического сценария явления лучше все же исходить непосредственно из уравнения (17.13). Ясно, что на ранней стадии процесса переноса поля (точнее, при $t < D/\kappa^2 B_0^2$), пока велик градиент B , проникновение поля в плазму обусловлено обычной диффузией. Но когда профиль B в достаточной мере сгладится, на первый план выходит перенос поля токовыми электронами (см. уравнение (17.10)) и характер решения меняется.

Рассмотрим вначале тот случай, когда векторы \mathbf{B} , ∇n и направление вглубь плазмы \mathbf{e}_z образуют левую тройку, как показано на рис. 17.1. Для такой геометрии $\kappa < 0$ в уравнении (17.15), а это значит, что нелинейный вынос поля конкурирует с диффузионным вносом, в результате при $t \rightarrow \infty$ устанавливается стационарное состояние

$$B = B_0(1 - \kappa B_0 z/2D) \quad (17.20)$$

(во избежание недоразумений напомним: $\kappa < 0$) — это асимптотика решения (17.19):

$$\varphi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} (\pi Dt)^{-1/2} (2D/\kappa B_0 - z).$$

Уравнение (17.20) представляет собой пример «запертого» на границе поля, хотя в одном отношении пример этот не безупречен: пол-

ный магнитный поток, проникший в проводящую среду, $\Phi = \int_0^{\infty} B dz$, оказывается в данном решении бесконечным. Во всяком

случае, легко видеть, что стационарный профиль поля во временной задаче — нечто сугубо отличное от линейной теории скин-эффекта. В следующем разделе мы продемонстрируем более корректный пример такого рода, а сейчас обратимся непосредственно к наиболее интересному случаю.

Пусть теперь \mathbf{B} , ∇n и \mathbf{e}_z образуют правую тройку. В сравнении с рис. 17.1, один из векторов, \mathbf{B} или ∇n , должен быть ориентирован противоположным образом — тогда $\kappa > 0$. Теперь уже конвективный член не соревнуется с диффузионным, но перехватывает на себя весь транспорт поля вглубь плазмы, который происходит даже в случае идеальной проводимости $\sigma \rightarrow \infty$ ($D \rightarrow 0$). Мы будем искать решение уравнения (17.15) в виде бегущей волны, как обычно поступают, например, в теории УВ:

$$B \equiv B(\xi), \quad \xi = z - ut. \quad (17.21)$$

Это дает возможность редуцировать уравнение (17.15) к следующему виду:

$$-uB'_\xi + (\kappa/2)(B^2)'_\xi = DB''_{\xi\xi}, \quad (17.22)$$

для которого, в свою очередь, мгновенно находится первый интеграл:

$$\text{const} - uB + (\kappa/2)B^2 = DB'_\xi. \quad (17.23)$$

Пусть профиль поля уже достаточно сгладился у левой границы $z = 0$: $B'_\xi \cong 0$ при $B = B_0$, тогда

$$u = \kappa B_0/2. \quad (17.24)$$

Для получения окончательного результата перепишем (17.23) в виде

$$u(b^2 - b) = D \frac{db}{d\xi}, \quad (17.25)$$

$$\xi \rightarrow \infty \Rightarrow b \rightarrow 0, \quad b'_\xi \rightarrow 0,$$

где $b = B/B_0$. Уравнение (17.25) без труда интегрируется:

$$B = (B_0/2)\{1 - \text{th}[(\kappa B_0/4D)(z - ut)]\}. \quad (17.26)$$

Это, быть может, самый важный результат теории скин-эффекта в модели ЭМГ (Кингсеп, Мохов, Чукбар, 1984 г.). Мы будем называть его ЭМГ-волной (в зарубежной литературе ее называют «KMS wave»). Она похожа на УВ, но не является таковой, поскольку в ней

не происходит движения вещества. Но она так же распространяется с постоянной скоростью (см. (17.24)); ее профиль остается постоянным во времени и лишь движется, как изображено на рис. 17.2; при этом ее передний фронт формируется как следствие конкуренции между нелинейностью и диффузией.

Образование ЭМГ-волны можно проследить аналитически с помощью подстановки (17.16). В сравнении со стационарным профи-

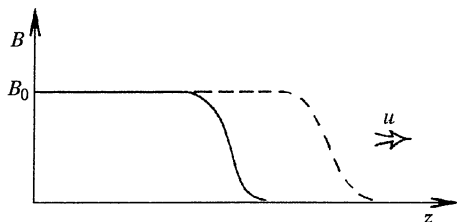


Рис. 17.2. ЭМГ-волна

лем (17.20) этот результат требует более мягкого условия $t \gg D/(\kappa B_0)^2$, т.е. длина распространения должна быть много больше ширины фронта волны.

Если градиент плотности достаточно мал, точнее, $u\tau < (D\tau)^{1/2}$, где τ — характерный масштаб времени в задаче, ЭМГ-волна не может сформироваться таким образом. Но в геометрии более общего вида, когда силовые линии магнитного поля уже не прямые, уравнение эволюции поля опять становится существенно нелинейным:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi l e} \operatorname{rot}(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} = \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}, \quad (17.27)$$

даже в однородной плазме. Скажем, для случая цилиндрической симметрии с $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ опять получается уравнение Бюргерса (17.15). Более детально мы это обсудим в следующем разделе, а сейчас ограничимся коротким замечанием. Хотя уравнение Бюргерса нелинейно, и ЭМГ-волна ранее не была известна, давно известны ее линейные аналоги, причем как в плазме, так и в твердом теле. Это дрейфовые волны и геликоны (вистлеры, свистящие атмосферерики), которые могут распространяться на фоне достаточно сильного постоянного поля. Предельный переход от нашего случая к этим хорошо известным линейным волнам не вполне тривиален: конечная величина поля B одновременно играет роль амплитуды линейной волны и внешнего поля, в котором эта волна распространяется.

17.3. Трансляция поля сторонним током

Инжекция высокоэнергичных пучков заряженных частиц в плазму может, в принципе, создать ситуацию, отличную от описанной выше. Среда становится многокомпонентной. Но полная система урав-

нений многокомпонентной гидродинамики для исследования трудна, и поэтому особый интерес представляют случаи, когда пучок может быть введен модельным образом, в качестве стороннего тока в уравнениях Максвелла (но не в законе Ома!):

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j}_b + \mathbf{j}), \quad \mathbf{E} = \frac{1}{nc} [\mathbf{j}, \mathbf{B}] + \frac{1}{c} \mathbf{j}. \quad (17.28)$$

В такой простой модели даже в линейном приближении оказывается возможен недиффузионный конвективный транспорт поля. Начнем, однако, с установления границ применимости системы уравнений (17.28). Представление пучка в виде стороннего тока \mathbf{j}_b , независимого от магнитного поля, означает, во-первых, что искажение траекторий частиц пучка в поле мало, что должно быть обусловлено неравенством $\rho_b \gg a$, где a — характерный пространственный масштаб задачи, а ρ_b — циклотронный радиус пучка. Равным образом можно сказать, что механическая компонента обобщенного импульса доминирует над полевой: $p_b \gg (Z_b e/c) A$. И, во-вторых, такое представление означает несущественность кулоновского трения для частиц пучка из-за их высокой энергии. Это возможно, например, если $j_b / (Z_b n_b e) \gg v_{Te}$ (надо помнить, что $v_{ef} \sim v^{-3}$). Так же пренебрежимо слабым должно быть и влияние пучковых неустойчивостей; все эти условия вместе определяют законность пренебрежения в уравнениях (17.28) как эффектом увлечения электронов плазмы пучком, так и влиянием плазмы на пучок. И, наконец, мы предположим, что пучок хорошо нейтрализован плазменным фоном, так что $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. Таким образом, в однородной плазме вместо (17.27) получаем

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{c}{4\pi n e} \operatorname{rot} (\mathbf{B} \nabla) \mathbf{B} - \frac{1}{n e} \operatorname{rot} [\mathbf{j}_b, \mathbf{B}] = \frac{c^2}{4\pi \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} + \frac{c}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{j}_b. \quad (17.29)$$

Мы положили $n = \text{const}$, чтобы привлечь внимание к эффектам, обусловленным сторонним током \mathbf{j}_b . Согласно уравнению (17.29), эти эффекты включают объемную генерацию поля и транспортировку поля, вмороженного в обратный ток пучка, — этот конвективный транспорт описывается последним членом в левой части уравнения (17.29); именно он будет обсуждаться ниже. Чтобы почувствовать главный эффект, обратимся снова к модельной плоской задаче. Пусть однородный пучок «ленточной», или «ножевой», геометрии пронизывает плоский плазменный слой $0 < z < a$ при том, что $\mathbf{j}_b \parallel \mathbf{e}_z$ и $\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_y$ (рис. 17.3). В начальный момент $t = 0$ ток пучка в проводящей среде полностью компенсируется обратным током, и $\mathbf{B} = 0$. Причина в том, что собственное магнитное поле пучка неспособно проникнуть в среду мгновенно — препятствуют принцип Ленца и закон Фарадея. В соответствии с этими законами в проводящей среде устанавливается так называемый обратный ток, который в на-

чальный момент полностью компенсирует ток пучка, а затем постепенно диссипирует (это обычная диффузия поля, иногда сопровождаемая неустойчивостями). Плазменная среда намного плотнее пучка, поэтому токовая скорость электронов обратного тока много

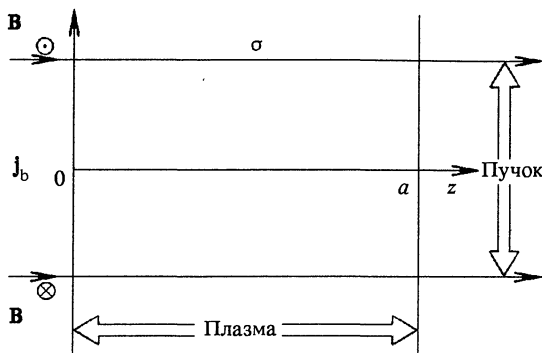


Рис. 17.3. Плоская система «плазма-пучок»

меньше, чем скорость частиц пучка. Вне проводящего слоя постоянно $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ — это собственное поле пучка. Формируются такие условия очень быстро — по закону электромагнитной индукции $\tau \approx a/c$, где τ — время, прошедшее после включения пучка. В наших предположениях уравнение (17.29) вырождается в линейное и при стандартном для скин-овых задач условии $\partial/\partial z \gg \partial/\partial x$ принимает вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial z} = D \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}, \quad (17.30)$$

$$u = j_b/ne, \quad D = c^2/4\pi\sigma.$$

Качественно его решение похоже на то, что было получено выше для уравнения Бюргера. На левой границе ($z \rightarrow 0$) поле вносится в проводник со скоростью u , так что толщина «скин-слоя» растет во времени пропорционально t . На правой границе ($z \rightarrow a$) устанавливается стационарный профиль ($\partial B/\partial t \approx 0$) как следствие соревнования между диффузионным проникновением и линейным выносом поля:

$$B = B_0 \exp [(u/D)(z - a)]. \quad (17.31)$$

В отличие от (17.20), профилю (17.31) соответствует конечный полный магнитный поток. Таким образом, в этом случае мы можем ввести эффективную длину проникновения $l \approx D/u$. Результат особенно выразителен в пределе бесконечной проводимости $\sigma \rightarrow \infty$, что в нашем случае реально означает $\sigma \gg c^2/au$. Тогда (17.31) вырож-

дается в θ -функцию, т.е. магнитное поле «заперто» на правой границе слоя. А слева оно вносится электронным течением с постоянной скоростью:

$$B = B_0(z - ut). \quad (17.32)$$

Отметим интересный эффект: если сторонний ток \mathbf{j}_b создается электронным пучком ($Z_b = -1$, $\mathbf{v}_b \parallel -\mathbf{j}_b$), тогда поле проникает в про-

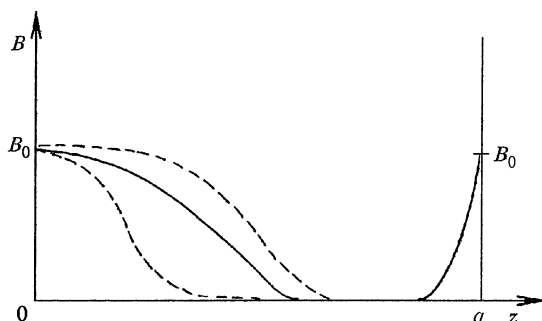


Рис. 17.4. Трансляция поля пучком

водящую среду навстречу пучку со стороны проводящего слоя, противоположной той, откуда происходит инжекция. Возможна также и транспортировка какого-то внешнего поля пучком, даже если оно намного превышает величину B_0 , но при обязательном условии сохранения геометрии, т.е. это поле должно быть параллельно u -оси.

Вся картина проникновения поля, вносимого в проводящий слой пучком, представлена на рис. 17.4. Поле заперто на правой границе, но с успехом проникает через левую, причем его профиль постепенно сглаживается во времени, поскольку $\sigma \neq \infty$. (В этом смысле есть разница с решением уравнения Бюргерса.)

Дополним эту картину рассмотрением более реалистичной, но и более сложной модели. Пусть теперь наш пучок является аксиально-симметричным. По виду система напоминает таковую на рис. 17.3, но теперь ось z — ось симметрии, и $\partial/\partial\phi \equiv 0$. Тогда $B = B_\phi$, и если $\partial/\partial z \gg r^{-1}$, уравнение (17.29) превращается в следующее:

$$\frac{\partial B}{\partial t} + u \frac{\partial B}{\partial z} - \kappa B \frac{\partial B}{\partial z} = D \frac{\partial^2 B}{\partial z^2}, \quad (17.33)$$

где $\kappa = c/(2\pi n e r)$.

Получается, что эффективная скорость транспортировки поля теперь зависит от B : $v_{ef} = u - \kappa B$. Если, например, j_b не зависит от r в какой-то окрестности оси симметрии, доминирует линейный перенос, и скорость v_{ef} обращается в нуль лишь при $B = B_0$. Если

же, как это обычно бывает, j_b падает с радиусом, то существует критическое поле

$$B_{cr} \equiv u/\kappa = 2\pi j_b r/c,$$

при котором v_{ef} меняет знак. Нелинейность уравнения (17.33) порождается кривизной поля. Соответственно все характерные особенности процесса те же, что и у нелинейного геликона, который описывается уравнением (17.27). Роль пучка, помимо линейного транспорта поля, сводится к обеспечению аксиальной симметрии, которую в данной системе едва ли можно создать как-то иначе.

Динамика проникновения поля в плазму после того, как диффузия размажет первоначальный скачок профиля, в этом случае оказывается сложной и богатой деталями. На левой границе ($z \rightarrow 0$) линейный транспорт поля доминирует при $B < B_{cr}$ и при этом продолжает сглаживать профиль $B(z)$, так что диффузионный член остается малым, и уравнение (17.33) вырождается в так называемое уравнение простой волны:

$$\partial_t(B - B_{cr}) - \kappa(B - B_{cr})\partial_z(B - B_{cr}) = 0.$$

Его решение хорошо известно:

$$z = -\kappa(B - B_{cr})t + \psi(B - B_{cr}), \quad (17.34)$$

где функция ψ должна определяться из начальных условий. Выглаживание профиля (17.34) позволяет положить асимптотически $\partial B/\partial z = 0$, когда $B = B_{cr}$. Для $B > B_{cr}$ уже происходит соревнование между нелинейным транспортом и диффузией, что ведет к установлению стационарного профиля поля:

$$(B - B_{cr})^{-1} = \kappa z/2D + (B_0 - B_{cr})^{-1}. \quad (17.35)$$

Поведение поля на правой границе особенно интересно. Если j_b слабо зависит от r , так что $B_{cr} < B_0/2$, то стационарное решение вида (17.35) на правой границе невозможно, и поле проникает в проводящую среду в виде бегущей сильно нелинейной волны (полезно сравнить результат с уравнением (17.26)):

$$B = -\frac{1}{2} B_0 \left\{ 1 + \text{th} \left[\frac{\kappa B_0}{4D} (z + vt) \right] \right\}. \quad (17.36)$$

Транспортировка поля сторонним током пучка — процесс в принципе хорошо наблюдаемый, — например, при инъекции в плазму сильноточных пучков. Этот эффект может оказаться и весьма важным практически, например в сильноточном ионном диоде. Перенос поля током пучка из диодного промежутка через катодную фольгу в транспортирующий плазменный канал может привести к опасной перефокусировке пучка.

Полезно заметить, что хотя уравнения (17.33) и (17.15) даны в одномерной форме, в действительности задача всегда, как минимум, двумерна. Конвекция поля в направлении z обусловлена не столько током j_z (которого может вообще не быть), сколько токами j_x и j_r , нормальными к e_z . Легко видеть, что в реальной геометрии, когда плазма так или иначе ограничена в направлении, перпендикулярном e_z , токовый перенос магнитной энергии должен происходить вдоль границ проводника из области, где магнитное поле заперто, в область, где имеет место ускоренное проникновение. Это полностью согласуется с решениями, приведенными выше.

17.4. Модификация «классической» скин-оболочечной задачи

Граничное условие (17.18) наиболее типично в условиях, характерных для импульсных плазменных систем, где обычно и работает лучше всего приближение ЭМГ. Но интересно исследовать также и характер предельного перехода от диффузионного скин-эффекта к конвективному. Это можно будет выполнить, рассмотрим в рамках ЭМГ задачу о проникновении поля в проводящую среду при классическом граничном условии

$$B_{(z=0)} = B_0 \cos \omega t \quad (17.37)$$

или

$$B_{(z=0)} = B_0 \Theta(t) \cos \omega t. \quad (17.38)$$

Эта проблема была решена автором вместе с Я. Калда. Она представляет интерес еще и потому, что нелинейные эффекты, обусловленные ∇n или ∇T (эффект Нернста—Эттингаузена), могут реально вмешиваться в электродинамику даже и в классических задачах, хотя бы на уровне поправок.

Пусть все приближения в нашей задаче будут теми же самыми, что и в уравнениях (17.13), (17.15), и геометрия задачи пусть будет той же, что и на рис. 17.1.

Нелинейность скин-оболочечной динамики удобно характеризовать безразмерным параметром β , который мы определим как отношение нелинейного пространственного масштаба $\delta_{ef} = D/\kappa B_0$ к линейной глубине скин-слоя $\delta_{sk} = (2D/\omega)^{1/2}$:

$$\beta \equiv \sqrt{2} \frac{\delta_{ef}}{\delta_{sk}} = \frac{\sqrt{\nu_{ef} \omega}}{v_{Ae} \partial_x \ln n},$$

где ν_{ef} — эффективная частота столкновений, а v_{Ae} — электронная альфвеновская скорость.

Очевидно, что линейная теория скин-эффекта, базирующаяся на уравнении диффузии поля, инвариантна относительно перемены

знака поля. Но уравнению Бюргерса, а следовательно, задаче о нелинейном конвективном скин-эффекте, такая инвариантность уже несвойственна. (В этом как раз и заключена причина, по которой так важна топология тройки векторов ∇n , \mathbf{B} , \mathbf{e}_z .) В плоской геометрии, в пределах применимости уравнения Бюргерса (17.15), поле определенной ориентации (скажем, $B > 0$) эффективно проникает в плазму (см., например, (17.26)), тогда как поле противоположной ориентации (соответственно $B < 0$) обнаруживает тенденцию к локализации вблизи поверхности плазмы — в духе решения (17.20). Значит, есть основания ожидать, что у этой задачи стационарного решения не существует. Импульсы положительной полярности должны периодически уходить вглубь плазмы, и таким образом поддерживаются постоянные потоки энергии и магнитного поля в плазменный объем. Поэтому при квазистационарном граничном условии (17.37) нужно дополнить периодическое решение ненулевым, положительным и постоянным во времени полем при $z \rightarrow \infty$. Эти соображения вполне подтверждаются точным решением.

Усредняя (17.15) по периоду $2\pi/\omega$, а затем дважды интегрируя по z , получим

$$B_{(z=\infty)} = \frac{\kappa}{2D} \int_0^{\infty} \left(\langle B^2 \rangle - B_{(z=\infty)}^2 \right) dz > 0. \quad (17.39)$$

Положим $B_{(z=\infty)} = \alpha B_0$, $0 < \alpha < 1$. Будем искать функцию $\varphi(z)$ (см. уравнение (17.16)). Заметим, что периодическое поведение во времени величины B не означает того же для φ . Решая диффузионное уравнение для φ при $z \rightarrow \infty$, нетрудно получить $\varphi \sim \exp(\alpha^2 \omega t / 4\beta^2)$. Для произвольного z естественно искать точное решение в виде

$$\varphi = \tilde{\varphi} \exp(\alpha^2 \omega t / 4\beta^2), \quad (17.40)$$

где $\tilde{\varphi}$ предполагается периодичной во времени. Эта функция может быть получена в форме фурье-разложения. Ограниченность B накладывает условие положительности $\tilde{\varphi}$, а отсюда, в свою очередь, следует закон спадания фурье-гармоник с номером. В итоге имеем

$$\tilde{\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}_n \exp [-(A_n/4\beta)(\omega/D)^{1/2}z - in\omega t], \quad (17.41)$$

$$A_n = 2(\alpha^2 - 4\beta^2 ni)^{1/2}, \quad \text{Re } A_n > 0, \quad \tilde{\varphi}_{-n} = \tilde{\varphi}_n^*.$$

Используя (17.41), можно переписать (17.37) в виде

$$A_n = \psi_{n+1} + \psi_n^{-1}, \quad \psi_n \equiv \tilde{\varphi}_n / \tilde{\varphi}_{n-1} < 1. \quad (17.42)$$

Принимая во внимание, что $\tilde{\varphi}$ — вещественная функция, определенная независимо от произвольного числового коэффициента, можно положить $\tilde{\varphi}_n = 1$. Из (17.42) находим

$$\psi_n = 1/(A_n - 1/(A_{n+1} - 1/(A_{n+2} - \dots))). \quad (17.43)$$

Теперь можно получить и общий член ряда (17.41):

$$\tilde{\varphi}_n = \prod_{m=1}^n 1/(A_m - 1/A_{m+1} - \dots). \quad (17.44)$$

Из (17.42) и (17.44) следует важный результат:

$$\alpha = \text{Re } 1/(A_1 - 1/(A_2 - 1/(A_3 - \dots))). \quad (17.45)$$

Таким образом, решение и в самом деле, помимо элемента периодичности, обязательно включает ненулевое поле B при $z \rightarrow \infty$. Уравнение (17.45) позволяет найти функцию $\alpha(\beta)$, а в конечном счете — и точное решение:

$$B = -(2D/\kappa) \partial_z \ln \{ \exp(-\alpha \kappa B_0 z / 2D) + 2 \text{Re} \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\varphi}_n \exp[-(A_n/4\beta)(\omega/D)^{1/2} z - in\omega t] \}, \quad (17.46)$$

согласованное с формулами (17.44), (17.45). В общем случае при произвольной величине β результат может быть представлен только рядом Фурье и цепными дробями. Но он оказывается весьма простым и наглядным в обоих предельных случаях: сильной и слабой нелинейности. Если нелинейность слаба, т.е. $\beta \gg 1$, можно вычислить $\alpha = 2^{-5/2} \beta^{-1}$, так что

$$B = \begin{cases} B_0 \exp(-z/\delta_{sk}) \cos(z/\delta_{sk} - \omega t), & z \ll \delta_{sk} \ln \beta, \\ B_0 / (2^{5/2} \beta), & z \gg \delta_{sk} \ln \beta. \end{cases} \quad (17.47)$$

Итак, в этом предельном случае, т.е. в универсальной по сути ситуации линейного скин-эффекта с малой конвективной поправкой, классическое решение дополняется расширяющимся вглубь плазмы плато малой амплитуды и постоянного знака. И, конечно, он может реализоваться не только в плазме, но и в металлах, только природа нелинейности там будет, скорее всего, иная — не ∇n , а ∇T .

Столь же наглядно решение в случае сильной нелинейности при $\beta \ll 1$. Здесь удобнее не искать предельный переход в точном решении, а исходить непосредственно из уравнения (17.15). Начнем с рассмотрения импульса отрицательной полярности. Характерное время формирования стационарного профиля вида (17.20) (определенное не из полного потока, а из наклона кривой) по порядку

величины равно $\tau \approx \beta^2/\omega \ll \omega^{-1}$. Это означает, что проникающее отрицательное поле «следит» за граничным условием, образуя вблизи поверхности осциллирующей профиль

$$B \cong B_0 \cos \omega t / [1 + (\kappa z / 2D) B_0 \cos \omega t]$$

с характерным масштабом $\delta_{ef} \approx \delta_{sk} \beta$ и глубиной проникновения $\delta \approx \delta_{sk}$. Далее мы повторим вывод уравнения (17.39), но интегрируя по $z > \delta_{sk}$. В этой области вклад могут давать только положительные импульсы; здесь, к тому же, можно пренебречь диффузионным членом в (17.15). Получаем

$$B_{(z=\infty)}^2 \cong \langle B^2 \Theta(B) \rangle_{(z=0)},$$

а окончательный результат при граничном условии (17.37) оказывается следующим:

$$B_{(z=\infty)} = B_0/2.$$

Вместо скин-эффекта мы для случая сильной нелинейности получили другой, не менее интересный: детектирование (выпрямление) сигнала магнитного поля плоским плазменным слоем.

Примерно таким же образом можно рассмотреть и более реалистичную задачу с граничным условием (17.38). Для краткости мы ограничимся формулировкой результатов, достаточно очевидных, если опираться на рассуждения и точные решения, приведенные выше. В пределе сильной нелинейности $\beta \ll 1$ решение совпадает с квазистационарным при z , меньших некоторого $z_0(t)$. При $z > z_0(t)$ имеем $B(z, t) = 0$. Величину $z_0(t)$ можно оценить, взяв интеграл от всего уравнения (17.15) по z и по t :

$$\int_0^{z_0} B_1(z, t) dz \cong (\kappa/2) \int_0^t [B^2 \Theta(B)]_{(z=0)} dt, \quad (17.48)$$

где $B_1(z, t)$ — решение квазистационарной задачи; $B_1(z, t) \rightarrow B_0/2$ при $z, t \rightarrow \infty$. Приближенная оценка $z_0(t)$ следует из аргумента в уравнении (17.26): $z_0(t) \approx u(B_0)t$. В пределе слабой нелинейности $\beta \gg 1$ какие-либо оценки имеет смысл делать только в области $z > \delta_{sk} \ln \beta$, где нелинейность существенна. Неплохое приближение получается при использовании следующей аппроксимации:

$$B_{(z=0)} = \alpha B_0 \Theta(t),$$

откуда следует зависимость от времени глубины проникновения:

$$z_0 \cong 2^{-5/2} \beta^{-1} \kappa B_0 t. \quad (17.49)$$

Уравнение (17.49) представляет ширину расширяющегося плато.

В заключение отметим особо, что в рамках нетривиальной ЭМГ-теории классический скин-эффект вообще невозможен. Поле в проводящей среде уходит на бесконечность, имеет при этом определенный знак, распространяется в виде нелинейной волны, амплитуда которой может достигать половины амплитуды осциллирующего поля на границе. К сему добавим, что результат в форме цепных дробей — в физике редкость.

Сильноточные пучки и пинчи.**Эффекты электронной магнитной гидродинамики**

Мы будем называть пучок заряженных частиц сильноточным, если ток его не мал в сравнении с так называемым альфвеновским током

$$I_A = \beta \gamma m c^3 / e, \quad (18.1)$$

где $\beta = v_b/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ — релятивистские факторы. Рассмотрим в качестве примера аксиально-симметричный электронный пучок. Его собственное магнитное поле на радиусе r может быть оценено как

$$B_\varphi = H_\varphi \approx I(r)/rc.$$

Соответственно можно оценить и радиус орбиты электрона в собственном поле пучка:

$$\rho_B \approx v_B/\omega_B = \gamma m c v_b / e B_\varphi = \gamma \beta m c^2 / e B_\varphi \approx r \gamma \beta I_A / I(r).$$

Если $I(r) > I_A$, то $\rho_B < r$, а значит, существенно пондеромоторное самовоздействие пучка. С другой стороны, как хорошо известно, два изолированных электрона всегда взаимодействуют по закону Кулона, и сила Ампера (или Лоренца) мала в сравнении с ней как v/c . Поэтому все эффекты, связанные с собственным магнитным полем, могут играть какую-то роль лишь в случае, когда пучок распространяется в ионизированной среде, нейтрализующей пространственный заряд. Правда, этот случай достаточно типичен, потому что достаточно мощный пучок в любом газе «пробивает» себе плазменный канал. Кроме того, при транспортировке мощных пучков нейтрализующий фон (иногда в виде сопутствующего пучка) организуется специально для предотвращения саморасталкивания. Поэтому во многих отношениях такие системы (представляющие, в частности, интерес для инерциального ядерного синтеза) являются плазменными системами.

В свою очередь Z-пинч — один из наиболее популярных плазменных объектов. Это просто самосогласованный по динамике токо-

несущий плазменный шнур, равновесие которого обусловлено балансом газокинетического давления плазмы и силы Ампера. Соответственно условие

$$B^2 \approx 8\pi nT \quad (18.2)$$

типично для Z -пинча. (У такого равновесия есть некоторые не совсем тривиальные аспекты, но мы на них останавливаться не будем.) Оценим, продолжая тему предыдущей главы, можно ли применять ЭМГ к описанию Z -пинча. Возьмем радиус в качестве единственного параметра и оценим линейную плотность как

$$N = \int_0^{\infty} n2\pi r dr \approx \pi n a^2,$$

и тогда одно из главных условий, обсуждавшихся выше, а именно $a < c/\omega_{pi}$, можно переписать как условие на погонное число ионов:

$$\Pi_i \equiv ZNe^2/Mc^2 < 1. \quad (18.3)$$

Это условие нередко оказывается выполненным в экспериментах с короткоимпульсными сильноточными разрядами, как то: плазменный фокус, сильноточные диоды, вакуумная искра, плазменный прерыватель тока. Мощные сильноточные пучки, согласованные с обратным током, также чувствительны к различным ЭМГ-эффектам (один из них уже обсуждался в разделе 17.3). В настоящей главе будут рассмотрены три хороших примера ЭМГ-динамики; один из них связан с особенностями диссипации в этом режиме и два — с консервативной динамикой таких сильноточных систем.

18.1. ЭМГ-сопротивление

Понятие ЭМГ-сопротивления очень важно даже и в ряде абсолютно прикладных задач.

Для начала вычислим в ЭМГ-приближении вектор Пойнтинга. Как можно было понять уже при рассмотрении ЭМГ-волны, нетривиальная электронная гидродинамика проявляется тогда, когда эффект Холла доминирует в обобщенном законе Ома над резистивными членами. (В противном случае в уравнениях (17.10), (17.13) диффузия поля доминирует над конвективным переносом.) Соответственно поток энергии может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \cong \frac{1}{4\pi} \left[\left[\frac{\mathbf{j}}{ne}, \mathbf{B} \right], \mathbf{B} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi ne} (\mathbf{j}B^2 - \mathbf{B}(\mathbf{j}\mathbf{B})) = \frac{B^2}{4\pi} \frac{\mathbf{j}_{\perp}}{ne}. \end{aligned} \quad (18.4)$$

Если, как это часто бывает, $\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$, этот поток соответствует плотности энергии $B^2/4\pi$, переносимой с токовой скоростью:

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{j}}{ne} \frac{B^2}{4\pi}. \quad (18.5)$$

(Это, однако, нельзя трактовать как замороженность энергии поля в электронный поток — плотность энергии поля равна $B^2/8\pi$.)

Имея целью фундаментальные соотношения, мы начнем, тем не менее, с простого примера. Оценим сопротивление коаксиального плазмозаполненного диода с радиусом электродов порядка r и длиной порядка L . Плотность плазмы оценим как n . Полный поток энергии от катода к аноду равен

$$Q \cong 2\pi r L \langle v_e \rangle \langle B^2 \rangle / 4\pi \cong 2\pi r L \langle v_e \rangle B_{\max}^2 / 8\pi, \quad (18.6)$$

где $\langle v_e \rangle = I / (2\pi r n e L)$. После подстановки $\langle v_e \rangle$ этот поток оказывается не зависящим от длины диода. Выражение для эффективного сопротивления диода будет очень простым:

$$R_{\text{ef}} = Q / I^2 = u / c^2 = 30u / c [\text{Ом}], \quad (18.7)$$

где $du \approx \langle v_e \rangle$ — токовая скорость, усредненная по длине порядка r . (Вообще говоря, в ответ войдет еще аспектное отношение L/r .) Согласно формуле (18.7) сопротивление обратно пропорционально n . И особенно интересно то, что оценка сопротивления не зависит от проводимости плазмы. Мы попытаемся продвинуться в понимании этого факта на базе простой теоретической модели, включающей обобщенный закон Ома и два уравнения Максвелла:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} + \frac{1}{nec} [\mathbf{j}, \mathbf{B}],$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \text{rot } \mathbf{B}, \quad (18.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \text{rot } \mathbf{E}.$$

Рассмотрим электроны, втекающие в идеально проводящий анод из однородной ($n = \text{const}$) хорошо проводящей плазмы ($\omega_{Be} \tau_e \gg 1$, где τ_e — эффективное время свободного пробега). Из уравнения (18.5) можно видеть, что условие непрерывности потока энергии невозможно удовлетворить на границе плазма-анод из-за большого различия в электронных концентрациях по обе стороны границы раздела, из которого следует скачок токовой скорости. Значит, энергия должна каким-то образом диссипироваться. Подобные же рассуждения, с незначительной модификацией, могут быть повторены и для границы плазмы с катодом.

Обобщенный закон Ома можно объединить с условием нулевой тангенциальной компоненты \mathbf{E} на поверхности электрода. Взяв касательную проекцию уравнения (18.8), получаем

$$j_{\perp} B / nec = j_{\tau} / \sigma,$$

т. е. электроны втекают в анод и, соответственно, вытекают из катода почти по касательной:

$$\theta \approx j_{\perp} / j_{\tau} \approx (\omega_{Be} \tau_e)^{-1} \ll 1, \quad (18.9)$$

при сохранении компоненты j_{\perp} . Резкий скачок j , следующий из роста величины j_{τ} вблизи электродов, и является причиной ненулевой диссипации, несмотря на высокую проводимость. Полезно повторить еще раз: эта ситуация подобна той, что возникает в газодинамике на фронте ударной волны, когда диссипация определяет структуру фронта, тонкие детали сценария, но не основные параметры УВ. И второй пример того же рода — затухание Ландау (см. гл. 2, 3).

Попробуем рассмотреть подробнее, в чем может быть польза от введения такой терминологии. Хорошо известно, что на микроскопическом уровне сопротивление потоку частиц обусловлено рассеянием отдельных частиц на некоторых микрообъектах (других частицах, волнах, дислокациях кристалла), при котором частицы из потока теряют свой импульс, полученный в процессе ускорения в электрическом поле. В режиме ЭМГ, как уже говорилось, и импульс, и энергия имеют две компоненты — механическую и полевую:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} n m v^2 + \frac{1}{8\pi} B^2, \quad \mathbf{P}_e = n m \mathbf{v} - \frac{n e}{c} \mathbf{A}. \quad (18.10)$$

Стандартные механизмы рассеяния электронов (кулоновское рассеяние или черенковское взаимодействие с ионно-звуковыми шумами) могут изменить только первые члены в обоих уравнениях (18.10), не затрагивая вторых. Причина такого ограничения очень проста: рассеивающие объекты малы, с ними взаимодействуют только индивидуальные частицы, тогда как полевые компоненты определяются движением электронов как целого. Магнитное поле — интегральная характеристика тока. Как следствие, чтобы изменить \mathbf{B} и \mathbf{A} в (18.10), должны сработать существенно макроскопические препятствия, на которых одновременно рассеивались бы большие ансамбли частиц. Характерный масштаб такого препятствия a должен удовлетворять неравенству $a > c / \omega_{pe}$. В этом случае, поскольку полевые компоненты доминируют над механическими в формулах (18.10), электронный ток должен испытывать очень большое сопротивление — это и есть ЭМГ-сопротивление.

Рассмотрим еще один пример. Стационарное течение токовых электронов идеально проводящей плазмы можно в приближении безмассовой ЭМГ описать уравнением

$$\text{rot} [\mathbf{j} / n, \mathbf{B}] = \mathbf{0}. \quad (18.11)$$

В двумерных вырожденных ситуациях, когда $\mathbf{j} \perp \mathbf{B}$ и $(\mathbf{B}\nabla)n \equiv 0$, $(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} \equiv 0$, оно соответствует течению вдоль линий уровня некоторой функции $F(\zeta, \eta)$, где (ζ, η) — криволинейные координаты на поверхности, ортогональной к \mathbf{B} . Пример: $F = nr^2$ в случае аксиально-симметричного течения ($\mathbf{B} \parallel \mathbf{e}_\varphi$ — см. ниже) и $F = n$ в случае плоской геометрии (см. выше). Таким образом, резкие изменения функции F (скажем, как следствие неоднородной плотности) и могут играть роль таких макроскопических препятствий. Когда линии тока (18.11) встречают такие барьеры, они их преодолеть не могут. Конечная σ меняет результат, который начинает зависеть от формы препятствий. Если же такое препятствие вообще непреодолимо (например, граница с вакуумом), то линии тока вблизи них искривляются, и ток начинает течь вдоль границы. На поверхности формируется токовый слой толщиной

$$\delta \approx a/\omega_{Be} \tau_e \ll a \quad (18.12)$$

(см. также (18.9)). Мощность

$$Q \cong \frac{j^2}{\sigma} v_{(\text{surf})} \cong \left(\frac{cB}{4\pi a} \right)^2 \frac{\delta a^2}{\sigma} = \frac{B^2}{8\pi} u a^2 \quad (18.13)$$

диссипирует в этом слое, где $u \approx cB/nea$ — токовая скорость вдали от пограничного слоя. Так и диссипирует полная энергия поля, принесенная током, падающим на это препятствие. Не следует смешивать данное явление с классическим скин-эффектом — задача стационарна!

Аналогичный эффект имеет место и в других случаях. Например, при инжекции электронного пучка в плазму, вследствие захвата его магнитного поля на границе (см. (17.31), (17.35)), ток плазмы, текущий вдоль границы ($z = 0$, a на рис. 17.3), испытывает сопротивление того же порядка:

$$R \approx u/c^2 = (u_b/c^2)(n_b/n) \quad (18.14)$$

(полезно проверить это соотношение в качестве упражнения).

В настоящее время установлена глубокая связь рассматриваемого явления с классической задачей о перколяции и «теорией потопа» (см. обзор Исиченко, 1992 г.). Эта сторона дела, однако, по уровню далеко выходит за рамки вводного курса. На наш взгляд, будет полезнее дополнить данный раздел еще одним содержательным примером.

Коротко говоря, главное утверждение, на котором мы базируемся, состоит в том, что динамика электронных течений важна для всех проявлений резистивных эффектов в рамках ЭМГ. В противоположном случае, если бы он реализовался, мы имели бы дело просто с резистивным плазменным столбом. Представим себе резистивный Z -пинч. Собственное магнитное поле тока перпендикулярно

оси пинча (это, пожалуй, простейшая из всех токовых геометрий), поэтому продольная теплопроводность должна быть подавлена фактором $[1 + (\omega_{Be} \tau_e)^2]^{-1}$. Несомненно, существует окно параметров, в котором этот эффект несуществен. Тогда можно сделать следующую оценку:

$$(\mathbf{u} \nabla) T \approx j^2 / \sigma \quad (18.15)$$

при $\partial/\partial t \cong 0$ и $|\nabla| \approx L^{-1}$, где L — длина пинча и \mathbf{u} — токовая скорость. Из уравнения (18.15) следует

$$\Delta T \approx (m j^2 v_{ef} / n e^2) (L/u), \quad (18.16)$$

где ΔT — разность температур на концах пинча. Критерий доминантной роли резистивных эффектов может быть построен на том, чтобы нагрев плазмы ΔT превосходил начальную температуру:

$$T < (m j^2 / n e^2) (L/u) v_{ef}.$$

Подставляя $j \approx cB/r$, где r — радиус пинча, можно привести его к следующей форме:

$$v_{ef} > \omega_{pe} (r/L) (T/mc^2)^{1/2} (8\pi n T/B^2)^{1/2}. \quad (18.17)$$

Когда критерий (18.17) выполнен, импеданс сильноточного Z-пинча определяется скорее омическими, нежели гидродинамическими эффектами, что отнюдь не выглядит маловероятным, но довольно часто ситуация бывает прямо противоположной. Возьмем в качестве примера сильноточный плазменный диод. Если падение напряжения $U \geq mc^2$, получаем $T/mc^2 \geq 1$. Далее, в подобных системах, как правило, $r/L \approx 1$ (в обратном пределе, $r/L \ll 1$, пинч обычно нестабилен). Приняв во внимание (18.2), что остается справедливым для любого квазистационарного пинча, получаем совсем уже упрощенную оценку вместо (18.17), $v_{ef} > \omega_{pe}$, которая не выполнена практически ни в какой реальной системе. При этом совершенно неважно, будет частота столкновений по своему происхождению кулоновской или коллективной. Если же выполнено неравенство, обратное (18.17), то уже никак невозможно избежать учета эффектов типа ЭМГ-сопротивления.

18.2. Эффект Морозова–Шубина

По всей видимости, первая задача в ЭМГ-приближении была решена в 1964 г. Морозовым и Шубиным (см., например, в книге Кадомцева, 1988 г.). Исследовалось стационарное консервативное электронное течение (см. (18.11)). Следуя Морозову и Шубину, рассмотрим аксиально-симметричный плазменный столб с резкой границей.

Форма границы предполагается, вообще говоря, нецилиндрической, хотя и аксиально-симметричной — «гофрированной». Дальнейшее рассмотрение базируется на совместном рассмотрении холловского уравнения равновесия и уравнения непрерывности

$$\operatorname{div} \mathbf{j} \equiv r^{-1} \partial_r r j_r + \partial_z j_z = 0, \quad (18.18)$$

из которого ясно, что обе компоненты, j_r и j_z , можно выразить всего лишь через одну скалярную функцию $I(r, z)$:

$$j_r = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial z}, \quad j_z = -\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial I}{\partial r}. \quad (18.19)$$

Пока мы имеем дело только с уравнением (18.18), эта функция остается произвольной. Удобно взять ее в следующем виде:

$$I = \int_0^r j_z 2\pi r dr, \quad (18.20)$$

т.е. $I(r, z)$ — полный ток, протекающий через кольцо радиуса r . Дополнительное условие налагается на эту функцию стационарным консервативным уравнением замороженности (18.11):

$$\partial_r u_r B_\varphi + \partial_z u_z B_\varphi = 0, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{j}/ne \quad (18.21)$$

($B_r = B_z = 0$ в аксиально-симметричной задаче). Теперь нам следует подставить в это уравнение u_r , u_z , используя (18.19), и, кроме того, воспользоваться очевидным соотношением $B_\varphi(r) = 2I/cr$. В результате получаем

$$\partial_r \left(\frac{I}{nr^2} \frac{\partial I}{\partial z} \right) - \partial_z \left(\frac{I}{nr^2} \frac{\partial I}{\partial r} \right) = 0, \quad (18.22)$$

или, что то же,

$$\frac{\partial I}{\partial z} \partial_r \left(\frac{I}{nr^2} \right) - \frac{\partial I}{\partial r} \partial_z \left(\frac{I}{nr^2} \right) = 0,$$

или, окончательно,

$$\frac{\partial I}{\partial z} \frac{\partial(nr^2)}{\partial r} - \frac{\partial I}{\partial r} \frac{\partial(nr^2)}{\partial z} = 0. \quad (18.23)$$

То же самое уравнение может быть представлено в виде якобиана

$$\frac{\partial(I, nr^2)}{\partial(z, r)} = 0. \quad (18.24)$$

Из (18.23) или (18.24) следует, что $I \equiv I(nr^2)$. Это соотношение уже было упомянуто при обсуждении уравнения (18.11). Таким образом, мы можем утверждать, что линии тока лежат на аксиально-

симметричных поверхностях $nr^2 = \text{const}$. Если, в частности, $n = \text{const}$, ток течет по прямым, причем течение ограничено минимальным радиусом. Иначе говоря, ток течет «на просвет», а в «область тени» не затекает (конечно, абсолютность этого утверждения обусловлена консервативностью задачи).

18.3. Пинч малой плотности

Эффект, представленный в настоящем разделе, был предсказан впервые Яньковым (Кингсен и др., 1987 г.). Как и в предыдущей задаче, мы полагаем геометрию аксиально-симметричной, а диссипативные эффекты — пренебрежимо малыми. Здесь, однако, будет учтен эффект электронного давления, так что обобщенный закон Ома примет более полный вид:

$$\mathbf{E} - \left[\frac{\mathbf{j}}{ne}, \mathbf{V} \right] + \frac{\nabla P}{ne} = \mathbf{0}, \quad (18.25)$$

и его еще следует дополнить уравнением, описывающим тепловой поток. Для упрощения последующих вычислений предположим, что электронное давление и температура связаны адиабатической зависимостью вдоль линий тока:

$$\frac{\mathbf{j} \nabla P}{ne} - \frac{\gamma P}{ne} (\mathbf{j} \nabla \ln n) = 0, \quad (18.26)$$

т. е. $T = T_0(I) (n/n_0)^{\gamma-1}$ — это будет корректно, если $I(r)$ — монотонная функция. Пусть электронная концентрация — заданная функция $n = n(z)$, т. е. ионную динамику мы не рассматриваем. Базовое уравнение можно получить, взяв ротор от уравнения (18.25), а затем сделав подстановку $z \rightarrow n(z)$. Результат:

$$\frac{2n}{\partial n} \frac{\partial I^2}{\partial n} - \frac{\partial I^2}{\partial r} \left[r + 2\pi c^2 r^3 \frac{dT_0}{d(I^2)} \left(\frac{n}{n_0} \right)^{\gamma-1} n \right] = 0. \quad (18.27)$$

Характеристики этого уравнения:

$$r(I) = \left(\frac{n_0}{n} \right)^{1/2} \left\{ C(I) - A(I) \left(\frac{n_0}{n} \right)^{\gamma-1} \right\}^{-1/2}, \quad (18.28)$$

где

$$A(I) = - \frac{2\pi}{\gamma-1} n_0 r_0^2 c^2 \frac{dT}{dI^2},$$

а $C(I)$ определяется из граничных условий. Ясно, что если $n(z)$ растет с ростом z , линии тока сначала прижимаются к оси по закону

$$r_{(I=\text{const})} \propto n^{-1/2}, \quad (18.29)$$

а потом, если $A > 0$, быстро расходятся от оси, устремляясь к бесконечности там, где

$$\frac{n}{n_0} \rightarrow \left(\frac{C}{A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}.$$

Этот последний эффект, впрочем, едва ли можно реально наблюдать, так как течение при этом выходит за рамки приближения ЭМГ. К тому же, в окрестности фокуса (18.29) в динамику могут вмешаться диссипативные эффекты.

В области максимального сжатия пучка (электронного потока) кинетическое давление электронного компонента порядка магнитного давления. Таким образом, из только что проведенного рассмотрения следует, например, острая фокусировка электронного пучка в сильноточном диоде при втекании электронного потока в анодную фольгу.

Мы лишь слегка коснулись эффектов электронной магнитной гидродинамики. Эта область современной физики плазмы в настоящее время интенсивно развивается. К сожалению, большинство ЭМГ-эффектов не только нелинейны, но и существенно трехмерны; поэтому адекватное их рассмотрение требует достаточно сложного формализма. Некоторые эффекты такого рода — в том числе очень красивые — можно найти в обзоре Гордеева и др. (1994 г.). Для вводного курса этот материал был бы слишком сложен. Но, по крайней мере, две последних главы, как и главы, посвященные сильной ленгмюровской турбулентности, могут дать неплохое представление о современной нелинейной физике плазмы.

Заключение

Для описания линейного движения можно воспользоваться разложением в ряд Фурье. Тогда для каждой гармоники будет существенна зависимость $\omega(\mathbf{k})$, а также амплитуда и, быть может, поляризация (одна из двух или трех). И это все. Представим себе теперь противоположный случай сильной нелинейности. Разложение в ряд, как правило, бессмысленно (формально можно представить в виде фурье-разложения любое поле, но это не позволит адекватно представить динамику в случае сильной связи между гармониками, хотя бы потому, что не работает принцип суперпозиции). Тогда мы должны определить, что может служить фундаментальным объектом в нашей теории, иначе говоря, на каком языке мы сможем должным образом представить эволюцию нелинейной системы. Часто употребляемый в таких случаях язык корреляционных функций или спектров пульсаций не совсем хорош — так невозможно однозначно отобразить нелинейные структуры. Фундаментальным объектом может быть солитон или вихрь, или солитон с ВЧ-наполнением, коллапсирующий кавитон, УВ, возможно, что-то еще — нелинейная физика воистину неисчерпаема. Случайно можем угадать точное решение, но более типична другая ситуация, когда приходится оперировать с некоторыми частными решениями, используя их с большим или меньшим успехом в качестве кирпичиков при построении нелинейного сценария. При этом нередко используются грубые оценки или «импрессионистский» подход, за отсутствием апробированных математических методов, привычных в линейной физике. В то же время принципиальную важность приобретает такой метод исследования, как численный эксперимент (термин «расчет» в этих случаях неуместен). Но в общем неудивительно, что вся нелинейная физика выглядит менее строгой и несколько «беспорядочной» в сравнении с линейной. Однако у нее есть огромное преимущество — красота.

Содержание данной книги в значительной мере отражает опыт автора. Как следствие, список литературы, следующий ниже, несколько перегружен сочинениями самого автора. Коррекция в сторону большей объективности едва ли возможна в общем виде, потому что на сегодняшний день главным учебным материалом по нелиней-

ной физике вообще и нелинейной физике плазмы в частности остаются журнальные публикации. Имя же им — легион.

Для любознательных читателей, желающих хотя бы составить впечатление о текущей литературе по нелинейной физике плазмы, я могу рекомендовать ведущие отечественные журналы: ЖЭТФ, «Письма ЖЭТФ» и «Физика плазмы», а также следующий (суженный, насколько возможно) круг зарубежных изданий: Physica D, Physical Review Letters A, Physics of Fluids, Journal of Nonlinear Science, Nonlinear Science Today.

В этих изданиях, а равно и в новых книгах полезно следить за фамилиями: Арнольд, Дыхне, Заславский, Захаров, Исиченко, Кадомцев, Калда, Кузнецов, Константин, Лакс, Левитов, Майда, Манакон, Манделъброт, Михайлов, Мозер, Рабинович, Сагдеев, Сасоров, Смолл, Тэйлор, Том, Фейгенбаум, Фриш, Фрухтман, Хасегава, Холм, Холмс, Цытович, Черников, Чукбар, Шапиро, Шертцер, Яньков.

Увы, даже такой список далеко не полон и отнюдь не свободен от вкусов и пристрастий автора. Тем более, в него не включен ни один экспериментатор — а это, как-никак, главная часть всего физического сообщества. Но экспериментаторов невозможно разделить на «линейных» физиков и «нелинейных» — они классифицируются по иным принципам.

Большинство вопросов, естественным образом возникающих в связи с дальнейшим углублением образования в данной области, столь же естественно и разрешатся, если вашей работой будет руководить физик достаточно высокого уровня. Нельзя, конечно, в своей учебе и работе полагаться только на руководителя. В Евангелии сказано: «Ученик не превзойдет своего учителя, но, усовершенствовавшись, станет каждый, как учитель его». И тот, кто не желает ограничить себя уровнем учителя, должен расти и совершенствоваться, опираясь более всего на лучшего из учителей — собственный опыт.

Автор благодарит за поддержку программу «Соросовские профессора» и Российский фонд фундаментальных исследований. Особые слова благодарности хотелось бы адресовать Издательству МФТИ, в трудное время нашедшему силы и средства для издания настоящей книги.

Список литературы

- Аранчук Л. Е., Калинин Ю. Г., Кингсеп А. С., Скорюпин В. А., Яньков В. В. //ЖЭТФ, — 1976. Т. 71, с. 1849–1862.
- Арцимович Л. А., Сагдеев Р. З., Физика плазмы для физиков — М.: Атомиздат, 1979.
- Bernstein I. B., Green J. M., Kruscal M. D. //Phys. Rev. — 1957. V. 108, p. 546–550.
- Брейzman Б. Н., Рютов Д. Д., Чеботаев П. З. //ЖЭТФ — 1972. Т. 62, с. 1409–1423.
- Брейzman Б. Н., Захаров В. Е., Мушер С. Л. //ЖЭТФ — 1973. Т. 64, с. 1297–1313.
- Vychenkov V. Yu., Silin V. P., Urypin S. A. //Phys. Reports — 1988 V. 164, p. 119–215.
- Van Kampen N. S. //Physica — 1955. V. 21, p. 949–963.
- Веденов А. А., Введение в теорию слаботурбулентной плазмы //Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича, Вып. 3. — М.: Госатомиздат, 1963. с. 203–244.
- Веденов А. А., Рютов Д. Д., Квазилинейная теория потоковых неустойчивостей. //Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича, Вып. 6. — М.: Атомиздат, 1972. С. 3–69.
- Vedenov A. A., Gordeev A. V., Rudakov L. I. //Plasma Physics. — 1967. V. 9, p. 719–733.
- Vedenov A. A., Velikhov E. P., Sagdeev R. Z. //Nucl. Fus. Suppl. — 1962. V. 2, p. 82–100.
- Галеев А. А., Сагдеев Р. З. Нелинейная теория плазмы. //Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича, Вып. 7. — М.: Атомиздат, 1973. с. 3–145.
- Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Сигов Ю. С., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. //Физика плазмы. — 1975. Т. 1, с. 10–20.
- Gardner C. S., Green J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. //Phys. Rev. Lett. — 1967. V. 19, p. 1095–1097.
- Голованов Ю. П., Елагин Н. И., Закатов Л. П., Кингсеп А. С., Плахов А. Г. //Физика плазмы. — 1977. Т. 3, с. 619–625.
- Голованов Ю. П., Елагин Н. И., Закатов Л. П., Кингсеп А. С., Плахов А. Г. //Физика плазмы. — 1978. Т. 4, с. 1274–1280.
- Gordeev A. V., Kingsep A. S. and Rudakov L. I. //Phys. Reports — 1994. V. 243, p. 216–315.
- Десяряев Л. М., Маханьков В. Г., Рудаков Л. И. //ЖЭТФ. — 1974. Т. 67, с. 533–542.
- Drummond W. E., Pines D. //Nucl. Fus. Suppl. — 1962. V. 3, p. 1049–1057.
- Закатов Л. П., Кингсеп А. С., Плахов А. Г. //Письма ЖЭТФ. — 1973. Т. 17, с. 280–283.
- Захаров В. Е. //ЖЭТФ. — 1972. Т. 62, с. 1745–1759.
- Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980.
- Иванов А. А., Рудаков Л. И. //ЖЭТФ. — 1966. Т. 51, с. 1522–1534.
- Isichenko M. B. //Rev. Mod. Phys. — 1992. V. 64, № 4, p. 961–1043.
- Кадоццев Б. Б. //УФН. — 1968. Т. 95, с. 111–130.
- Кадоццев Б. Б. Коллективные явления в плазме. — М.: Наука, 1988
- Кингсеп А. С. Сильная ленгмюровская турбулентность и турбулентный нагрев плазмы. //Итоги науки и техники. Серия Физика плазмы. Под ред. В. Д. Шафранова, Вып. 4. — М.: ВИНТИ, 1983. С. 48–113.

- Кингсен А. С.* //Физика плазмы. — 1991. Т. 17, с. 582–591.
- Кингсен А. С., Чукбар К. В., Яньков В. В.* Электронная магнитная гидродинамика. //Вопросы теории плазмы. Под ред. Б. Б. Кадомцева, Вып. 16. — М.: Атомиздат, 1987. С. 243–291.
- Кингсен А. С., Мохов Ю. В., Чукбар К. В.* //Физика плазмы. — 1984. Т. 10, с. 854–859.
- Кингсен А. С., Рудаков Л. И.* //ЖЭТФ. — 1970. Т. 58, с. 582–586.
- Kingsep A. S., Rudakov L. I. Sudan R. N.* //Phys. Rev. Lett. — 1973. V. 31, p. 1482–1485.
- De Kluijver H.* //Rijnhuizen Report 77–106 (Rijnhuizen–Jutphas–Nederland: FOM–Instituut voor Plasmafysica), 1977.
- Ландау Л. Д.* //ЖЭТФ. — 1946. Т. 16, с. 574–586.
- Литвак А. Г.* Динамические нелинейные электромагнитные явления в плазме. //Вопросы теории плазмы. Под ред. М. А. Леонтовича, А. Б. Михайловского. Вып. 10. — М.: Атомиздат, 1980. С. 164–242.
- Мазитов Р. К.* //ПМТФ — 1965., т. 1, с. 27–31.
- O'Neil T.M.* //Phys. Fluids. — 1965. V. 8, p. 2255–2262.
- Рудаков Л. И.* //ЖЭТФ — 1970. Т. 59, с. 2091–2103.
- Рудаков Л. И., Кораблев Л. В.* //ЖЭТФ — 1966. Т. 50, с. 220–231.
- Рудаков Л. И.* //ДАН СССР — 1972. Т. 207, с. 821–3.
- Силин В. П.,* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму», М.: Наука, 1973 *Stix T. H.* The Theory of Plasma Waves. — N. Y.: Mc Grow Hill Book Company, 1963. *Франк-Каменецкий Д. А.,* Лекции по физике плазмы — М.: Наука, 1961.
- Цытович В. Н.,* Нелинейные эффекты в плазме. — М.: Наука, 1967.
- Цытович В. Н.,* Теория турбулентной плазмы. — М.: Атомиздат, 1971.